Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ В КЛАССИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Материалы конференции

10-я научная конференция
(4–5 июня 2026 г., Ярославль)

Ярославль
2026

УДК 51+004(063)
ББК В1я43+3973.2я43
М34

Печатается в соответствии с решением оргкомитета
научной конференции

Редакционная коллегия:
М. В. Невский, д-р физ.-мат. наук, доцент, ЯрГУ (ответственный редактор);
П. Н. Нестеров, д-р физ.-мат. наук, доцент, ЯрГУ;
Д. Ю. Чалый, канд. физ.-мат. наук, доцент, ЯрГУ;
А. Ю. Ухалов, канд. физ.-мат. наук, доцент, ЯрГУ (технический редактор).

Рецензенты:
Л. С. Казарин, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры алгебры
и математической логики ЯрГУ;
Е. П. Кубышкин, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры
математического моделирования ЯрГУ.

М 34 **Математика и компьютерные науки в классическом университете :** материалы конференции / отв. ред. М. В. Невский ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : Канцлер, 2026. — 133 с. — (10-я научная конференция, 4–5 июня 2026 г., Ярославль) — ISBN 978-5-8397-1262-1.

В сборнике представлены материалы 10-й научной конференции «Математика и компьютерные науки в классическом университете», состоявшейся в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова в июне 2026 г. Конференция приурочена к 50-летию математического факультета ЯрГУ им. П. Г. Демидова.

УДК 51+004(063)
ББК В1я43+3973.2я43

ISBN 978-5-8397-1262-1

Содержание

Предисловие

Первый корпус ЯрГУ. Январь 2026 г.

Традиция проведения конференций цикла «Математика и компьютерные науки в классическом университете» родилась в феврале 2005 г., когда была проведена первая такая конференция. Сначала конференции считались научно-методическими и проходили под наименованием «Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете» (2005, 2007, 2010, 2012, 2014 гг.). В 2016 г. математическому факультету исполнилось 30 лет. В том юбилейном году тематика конференции была расширена и включила в себя, наряду с научно-методическими, и доклады научно-исследовательского характера. С тех пор конференции именовались научными и проходили уже под нынешним названием (2016, 2018, 2020, 2023 гг.). Конференции организуются в 7 корпусе университета, в них принимают участие преподаватели математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники (ИВТ).

Своеобразный итог пятнадцатилетней работы подвела 8-я научная конференция, состоявшаяся в апреле 2020 г. Эта конференция была посвящена 50-летию воссоздания Ярославского государственного университета и полувековому юбилею математического и компьютерного образования в ЯрГУ. Обширный сборник материалов 8-й конференции содержит как научные и научно-методические статьи, так и воспоминания преподавателей, а также большое число фотографий разных лет. Сборник 8-й конференции был широко распространен среди сотрудников, студентов и выпускников университета и получил много положительных откликов.

Таким образом, нынешняя научная конференция «Математика и компьютерные науки в классическом университете» является 10-й по счёту. Юбилейной она является и по содержанию, поскольку посвящена 50-летию математического факультета ЯрГУ. Как мемориальная конференция она дополняет и продолжает 8-ю конференцию 2020 г.

Второй корпус ЯрГУ. Январь 2026 г.

История математического и компьютерного образования в нашем университете началась в 1970 г. при его воссоздании. Сначала студенты-математики учились в главном корпусе университета на Красной площади (ул. Советская, 14), а затем переехали во второй корпус, расположенный на пересечении улиц Кирова и Андропова (ул. Кирова, 8/10). Математический факультет ЯрГУ был образован 7 июля 1976 г. в соответствии с приказом министра высшего и среднего специального образования РСФСР № 309 при разделении физико-математического факультета на физический и математический факультеты. В 1986 г. был создан факультет

ИВТ, а в 1989 г. оба факультета переехали в новое здание за Волгой — 7-й корпус ЯрГУ (ул. Союзная, 144). В этом здании дружественные факультеты и встречают свои юбилейные даты.

Седьмой корпус ЯрГУ. Декабрь 2021 г.

В настоящем сборнике представлены статьи, имеющие научный, методический или исторический характер, а также памятные фотографии. Подготовка сборника к печати осуществлялась ответственным и техническим редакторами. Первоначальный компьютерный набор докладов в системе LaTeX сделан самими авторами, однако при работе над сборником в отдельные тексты была внесена некоторая техническая правка.

М. В. Невский,
ответственный редактор,
заведующий кафедрой математического анализа ЯрГУ

УДК 514.177.2+517.97

В. Е. Балабаев
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: balabaev49@mail.ru

Построение матричных уравнений с конечным числом решений

Построены примеры кубических уравнений для матрицы второго порядка с любым возможным конечным числом решений.

Библиография: 1 название.

Ключевые слова: матричные алгребраические уравнения, собственные значения, собственные векторы, нильпотентность, конечное число решений.

В работе [1] было доказано, что уравнение $X^m + A_1X^{m-1} + ... + A_m = O$, где X, A_i, O – матрицы порядка n над полем $\mathbb{C}$, имеет не более C^n_{mn} решений в общем случае. В необщей ситуации может быть и ноль, и бесконечное число решений. Существуют ли примеры уравнений с числом решений от 1 до C^n_{mn} неизвестно даже для $m = 2$ и $n = 2$. В [1] высказана гипотеза о существовании таких уравнений в случае $m = 2, n = 2$.

В настоящей работе мы решаем эту проблему в случае $m = 3, n = 2$. Максимально возможное конечное число решений в этом случае равно 15. Приведём пример уравнения, где это число достигается.

Пример 1.

$$X^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X^2 + \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Имеем

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3 - 9\lambda & \lambda^2 - 9 \\ -\lambda^2 - 4 & \lambda^3 - 6\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^6 - 14\lambda^4 + 49\lambda^2 - 36 = 0$, собственные значения $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$, $\lambda_3, \lambda_4 = \pm 2$, $\lambda_5, \lambda_6 = \pm 3$.

Система для нахождения собственных векторов:

$$\begin{cases} (\lambda_i^3 - 9\lambda_i)V_{i1} + (\lambda_i^2 - 9)V_{i2} = 0, \\ (-\lambda_i^2 - 4)V_{i1} + (\lambda_i^3 - 6\lambda_i)V_{i2} = 0. \end{cases}$$

Опуская вычисления, находим:

если $\lambda_1 = 1$, то $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, если $\lambda_2 = -1$, то $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
если $\lambda_3 = 2$, то $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, если $\lambda_4 = -2$, то $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
если $\lambda_5 = 3$, то $V_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$, если $\lambda_6 = -3$, то $V_6 = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \end{pmatrix}$.
Решения имеют следующий вид:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} V_{i1} & V_{j1} \\ V_{i2} & V_{j2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{i1} & V_{j1} \\ V_{i2} & V_{j2} \end{pmatrix}^{-1},$$

$i, j = 1...6, i \neq j$.
Выпишем их:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{11} & \frac{9}{11} \\ \frac{13}{11} & \frac{24}{11} \end{pmatrix},$$

$$X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -13 & -12 \end{pmatrix},$$

$$X_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$X_8 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ -13 & 12 \end{pmatrix},$$

$$X_9 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-20}{11} & \frac{9}{11} \\ \frac{13}{11} & \frac{-24}{11} \end{pmatrix},$$

$$X_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{80}{31} & \frac{9}{31} \\ \frac{26}{31} & \frac{75}{31} \end{pmatrix},$$

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & -13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -9 \\ 26 & 15 \end{pmatrix},$$

$$X_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -9 \\ 26 & -15 \end{pmatrix},$$

$$X_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-80}{31} & \frac{9}{31} \\ \frac{26}{31} & \frac{-75}{31} \end{pmatrix},$$

$X_{15} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 13 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{27}{13} \\ \frac{13}{3} & 0 \end{pmatrix}.$

Всего 15 решений.

Когда собственные векторы совпадают, число решений уменьшается.

Пример 2.

$X^3 + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} X^2 + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 0$

Имеем:

$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 & 2\lambda^2 + \lambda \\ 0 & \lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 16 \end{pmatrix}.$

Характеристическое уравнение:

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3)(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 16) = 0.$$

Имеем 6 корней: $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$, $\lambda_3, \lambda_4 = \pm 2$, $\lambda_5 = 3$, $\lambda_6 = 4$.

Система для нахождения собственных векторов

$$\begin{cases} (\lambda_i^3 - 3\lambda_i^2 - \lambda_i + 3)V_{i1} + (2\lambda_i^2 + \lambda_i)V_{i2} = 0, \\ (\lambda_i^3 - 4\lambda_i^2 - 4\lambda_i + 16)V_{i2} = 0. \end{cases}$$

Опуская несложные вычисления, находим:

если $\lambda_1 = 1$, то $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, если $\lambda_2 = -1$, то $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

если $\lambda_3 = 2$, то $V_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$, если $\lambda_4 = -2$, то $V_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

если $\lambda_5 = 3$, то $V_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, если $\lambda_6 = 4$, то $V_6 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Решениями будут:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} V_{i1} & V_{j1} \\ V_{i2} & V_{j2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{i1} & V_{j1} \\ V_{i2} & V_{j2} \end{pmatrix}^{-1} \tag{1}$$

где $\begin{cases} i = 1 \\ j = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 1 \\ j = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 1 \\ j = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 2 \\ j = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 2 \\ j = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 2 \\ j = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 3 \\ j = 4 \end{cases}$,

$\begin{cases} i = 3 \\ j = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 3 \\ j = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 4 \\ j = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 4 \\ j = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} i = 5 \\ j = 6 \end{cases}$.

Имеется всего 12 решений.

Исследуем, какое число решений возможно для кубического уравнения с матрицами второго порядка.

Если имеется 6 различных собственных значений и 6 линейно независимых собственных векторов, то будет 15 решений, как в примере 1.

Если есть 6 различный собственных решений, имеются совпадения $V_1 = V_2$, остальные собственные векторы линейно независимы, то будет 14 решений, находящихся по формуле (1), где

$$\begin{cases} i=1 \\ j=3 \end{cases}, \begin{cases} i=1 \\ j=4 \end{cases}, \begin{cases} i=1 \\ j=5 \end{cases}, \begin{cases} i=1 \\ j=6 \end{cases}, \begin{cases} i=2 \\ j=3 \end{cases}, \begin{cases} i=2 \\ j=4 \end{cases}, \begin{cases} i=2 \\ j=5 \end{cases},$$
$$\begin{cases} i=2 \\ j=6 \end{cases}, \begin{cases} i=3 \\ j=4 \end{cases}, \begin{cases} i=3 \\ j=5 \end{cases}, \begin{cases} i=3 \\ j=6 \end{cases}, \begin{cases} i=4 \\ j=5 \end{cases}, \begin{cases} i=4 \\ j=6 \end{cases}, \begin{cases} i=5 \\ j=6 \end{cases}.$$

Если есть 6 различных собственных значений и есть совпадения $V_1 = V_2 = V_3$, то будет 12 решений находящихся по формуле (1), как в примере 2, где $i, j = 1, ..., 6, i < j$, но $(i, j) \neq (1, 2), (1, 3), (2, 3)$.

Если есть 6 различных собственных значений и есть совпадения $V_1 = V_2, V_3 = V_4, V_5 = V_6$, то будет также 12 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 6, i < j$, но $(i, j) \neq (1, 2), (3, 4), (5, 6)$.

Если есть также 6 различных значений и есть совпадения $V_1 = V_2 = V_3, V_4 = V_5$, то будет 11 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 6, i < j$, но $(i, j) \neq (1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5)$.

Если есть 6 различных значений и есть совпадения $V_1 = V_3 = V_3$ и $V_4 = V_5 = V_6$, то будет 9 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 6, i < j$, но $(i, j) \neq (1, 2), (1, 3), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$.

Если есть 6 различных значений и есть совпадения $V_1 = V_3 = V_3 = V_4$, то тоже будет 9 решений по формуле (1), где $i, j = 1...6, i < j$, но $(i, j) \neq (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)$.

Если есть 6 различных значений и есть совпадения $V_1 = V_3 = V_3 = V_4$ и $V_5 = V_6$, то будет 8 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 6, i < j$, но $(i, j) \neq (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 6)$.

Если есть 6 различных значений и совпадения $V_1 = V_3 = V_3 = V_4 = V_5$, то будет 5 решений по формуле (1), где

$$\begin{cases} i=1 \\ j=6 \end{cases}, \begin{cases} i=2 \\ j=6 \end{cases}, \begin{cases} i=3 \\ j=6 \end{cases}, \begin{cases} i=4 \\ j=6 \end{cases}, \begin{cases} i=5 \\ j=6 \end{cases}.$$

Если есть 5 различных значений и 5 линейно независимых соответствующих собственных векторов, то будет 10 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 5, i < j$.

Если есть 5 значений и совпадения $V_1 = V_2$, то будет 9 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 5, i < j, (i, j) \neq (1, 2)$.

Если есть 5 значений и совпадения $V_1 = V_2$ и $V_3 = V_4$, то будет 8 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 5, i < j, (i, j) \neq (1, 2), (3, 4)$.

Если есть 5 значений и совпадения $V_1 = V_2 = V_3$, то будет 7 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 5, i < j, (i, j) \neq (1, 2), (2, 3), (1, 3)$.

Если есть 5 значений и совпадения $V_1 = V_2V_3$ и $V_4 = V_5$, то будет 6 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 5, i < j, (i, j) \neq (1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5)$.

Если есть 5 значений и совпадения $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$, то 4 решения по формуле (1), где

$$\begin{cases} i=1 \\ j=5 \end{cases}, \begin{cases} i=2 \\ j=5 \end{cases}, \begin{cases} i=3 \\ j=5 \end{cases}, \begin{cases} i=4 \\ j=5 \end{cases}.$$

Если есть 4 различных значения и 4 линейно независимых собственных вектора, то будет 6 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 4, i < j$.

Если есть 4 различных значения и совпадения $V_1 = V_2$, то будет 5 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 4, i < j, (i, j) \neq (1, 2)$.

Если есть 4 различных значения и совпадения $V_1 = V_2$ и $V_3 = V_4$, то будет 5 решений по формуле (1), где $i, j = 1, ..., 4, i < j, (i, j) \neq (1, 2), (3, 4)$.

Если есть 4 различных значения и совпадения $V_1 = V_2 = V_3$, то будет 3 решения по формуле (1), где

$$\begin{cases} i = 1 \\ j = 4 \end{cases}, \begin{cases} i = 2 \\ j = 4 \end{cases}, \begin{cases} i = 3 \\ j = 4 \end{cases}.$$

Если есть 3 различных значения и 3 линейно независимых собственных вектора, то будет 3 решения по формуле (1), где $i, j = 1, 2, 3, i < j$.

Если есть 3 различных значения и совпадают $V_1 = V_2$, то будет 2 решения по формуле (1), где $\begin{cases} i = 1 \\ j = 3 \end{cases} \begin{cases} i = 2 \\ j = 3 \end{cases}.$

Если есть 2 различных значения и 2 линейно независимых собственных вектора, то будет 1 решение по формуле (1), где $i = 1, j = 2$.

Пример 3. Уравнение $X^m = aE$, где

$$E = \begin{pmatrix} 0 & ... & a \\ 0 & ... & 0 \\ & ... & \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

$m \geq n, a \neq 0, n$ – порядок матрицы, не имеет решений. Собственные значения здесь все равны нулю, значит, матрица X нильпотентна. Поэтому X^m равно нулевой матрице и X не может быть решением данного уравнения. Нетрудно показать, что уравнение

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет бесконечное число решений вида

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{-ab} & b \\ a & -\sqrt{-ab} \end{pmatrix},$$

зависящего от двух параметров $a, b \in \mathbb{C}$.

Таким образом, кубическое уравнение с матрицами 2 порядка может иметь либо бесконечное число решений, либо любое число решений от 0 до 15.

Замечание. То, что формула (1) даст решения матричного уравнения, доказывается следующим образом.

Пусть $V_i = \begin{pmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \end{pmatrix}$ и $V_j = \begin{pmatrix} V_{j1} \\ V_{j2} \end{pmatrix}$ линейно независимые векторы. Тогда

$$X_{ij}\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_{i1}&V_{j1}\\V_{i2}&V_{j2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i&0\\o&\lambda_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{i1}&V_{j1}\\V_{i2}&V_{j2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}V_{i1}&V_{j1}\\V_{i2}&V_{j2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i&0\\o&\lambda_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{j2}&-V_{j1}\\-V_{i2}&V_{j2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}V_{i1}&V_{j1}\\V_{i2}&V_{j2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i&0\\o&\lambda_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_{i1}&V_{j1}\\V_{i2}&V_{j2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i\\0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_i&V_{i1}\\\lambda_i&V_{i2}\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}$$

Поэтому

$$(X_{ij}^2+PX_{ij}+Q)\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}=(X_{ij})\lambda_i\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}\lambda_i&V_{i1}\\\lambda_i&V_{i2}\end{pmatrix}+Q\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}=$$
$$=\lambda_i^2E\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}+\lambda_iP\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}+Q\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}=(\lambda_i^2E+\lambda_iP+Q)\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}=A(\lambda_i)\begin{pmatrix}V_{i1}\\V_{i2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Так как V_i и V_j линейно независимые векторы, а матрица $X_{ij}^2+PX_{ij}+Q$ переводит их в нулевой вектор, то X_{ij} – решение данного матричного квадратного уравнения $X_{ij}^2+PX_{ij}+Q=0$.

То же утверждение верно и для матричных уравнений любых степеней. Для матриц более высокого порядка это верно, доказательство аналогично, но более громоздко.

Ссылки

[1] *Гельфанд С. И.* О числе решений квадратного уравнения // Глобус. Общематематический семинар. 2004. Вып. 1. С. 124–133.

УДК 514.177.2+517.97

В. Е. Балабаев
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: balabaev49@mail.ru

О числе решений матричного квадратичного уравнения

Построены примеры квадратных уравнений для матрицы третьего порядка с любым возможным конечным числом решений.

Библиография: 1 название.

Ключевые слова: матричные алгребраические уравнения, собственные значения, собственные векторы, нильпотентность, конечное число решений.

Рассмотрим квадратное матричное уравнение

$$X^2 + PX + Q = O,$$

где X, P, Q, O – матрицы порядка 3. Как доказано в [1], в общем случае конечное число решений такого уравнения не более 20. В необщей ситуации может быть либо бесконечное число решений, либо ноль.

Пример 1. Уравнение

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет бесконечно много решений

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \in \mathbb{C}$ – любое число.

Пример 2. Уравнение

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет бесконечно много решений вида

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-bc} \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & -b & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & \sqrt{-bc} & -\sqrt{-bc} \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & 0 & b \\ -c & 0 & \sqrt{-bc} \\ c & 0 & -\sqrt{-bc} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbb{C}$ – любые. Все решения X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 зависят от двух параметров.

Пример 3. Уравнение $X^2 = aE$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеет бесконечно много решений видов

$$X_1 = \sqrt{a}E, \quad X_2 = -\sqrt{a}E, \quad X_3 = A \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} A^{-1},$$

$$X_4 = A \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} A^{-1}, \quad X_5 = A \begin{pmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} A^{-1},$$

$$X_6 = A \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} A^{-1}, \quad X_7 = A \begin{pmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} A^{-1},$$

$$X_8 = A \begin{pmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} A^{-1},$$

где A – любая матрица, у которой $\det A \neq 0$.

Рассмотрим теперь уравнения для матриц третьего порядка с конечным числом решений.

Пример 4. Уравнение

$$X^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

имеет $\det A(\lambda) = (\lambda^2 + b)(\lambda - ac)$.
Пусть $b^2 \neq ac$. Тогда собственные значения равны

$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{b}, \lambda_3, \lambda_4 = \pm\sqrt[4]{ac}, \lambda_5, \lambda_6 = \pm i\sqrt[4]{ac}$. Для нахождения собственных векторов имеем систему

$$\begin{cases} \lambda_j^2 V_{j1} + aV_{j3} = 0, \\ (\lambda_j^2 + b)V_{j2} = 0, \\ cV_{j1} + \lambda_j^2 V_{j3} = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{b}$, то $V_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, j = 1, 2.$

Если $\lambda_3, \lambda_4 = \pm\sqrt[4]{ac}$, то $V_j = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \\ -\sqrt{c} \end{pmatrix}, j = 3, 4.$

Если $\lambda_5, \lambda_6 = \pm i\sqrt[4]{ac}$, то $V_j = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \\ \sqrt{c} \end{pmatrix}, j = 5, 6.$

Решения строятся так:

$$X_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{c} & \sqrt{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{b} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[4]{ac} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt[4]{ac} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{c} & -\sqrt{c} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[4]{ac}}{2}(1+i) & 0 & \frac{a(-1+i)}{2\sqrt[4]{ac}} \\ 0 & \pm ib & 0 \\ \frac{c(-1-i)}{2\sqrt[4]{ac}} & 0 & \frac{\sqrt[4]{ac}}{2}(1-i) \end{pmatrix}$$

Аналогично получаем

$$X_{3,4} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[4]{ac}}{2}(1-i) & 0 & \frac{a(-1-i)}{2\sqrt[4]{ac}} \\ 0 & \pm ib & 0 \\ \frac{c(-1-i)}{2\sqrt[4]{ac}} & 0 & \frac{\sqrt[4]{ac}}{2}(1-i) \end{pmatrix}$$

$$X_{5,6} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt[4]{ac}}{2}(1+i) & 0 & \frac{a(1-i)}{2\sqrt[4]{ac}} \\ 0 & \pm ib & 0 \\ \frac{c(-1-i)}{2\sqrt[4]{ac}} & 0 & -\frac{\sqrt[4]{ac}}{2}(1+i) \end{pmatrix}$$

$$X_{7,8} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[4]{ac}}{2}(-1+i) & 0 & \frac{a(1-i)}{2\sqrt[4]{ac}} \\ 0 & \pm ib & 0 \\ \frac{c(1+i)}{2\sqrt[4]{ac}} & 0 & \frac{\sqrt[4]{ac}}{2}(1+i) \end{pmatrix}$$

Всего 8 решений.

Пример 5. Уравнение

$$X^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

имеет
$$\det A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 0 & \lambda+\frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & \lambda^2-3\lambda & 0\\ 5\lambda-\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}.$$
Для нахождения собственных значений имеем уравнение
$$\lambda^6-3\lambda^5-5\lambda^4+15\lambda^3+4\lambda^2-12\lambda=0,$$
откуда $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-1,\lambda_4=2,\lambda_5=-2,\lambda_6=3$. Система для нахождения собственных векторов имеет вид
$$\begin{cases}\lambda_i^2V_{i1}+(\lambda_i+\frac{2}{\sqrt{5}})V_{i3}=0,\\ (\lambda_i^2-3\lambda_i)V_{i2}=0,\\ (5\lambda_i-2\sqrt{5})V_{i1}+\lambda_i^2V_{j3}=0.\end{cases}$$

Если $\lambda_1=0$, то $V_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Если $\lambda_2=1$, то $V_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\sqrt{5}-5\end{pmatrix}$.
Если $\lambda_3=-1$, то $V_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\sqrt{5}+5\end{pmatrix}$. Если $\lambda_4=2$, то $V_4=\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\sqrt{5}-5}{2}\end{pmatrix}$.
Если $\lambda_5=-2$, то $V_5=\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\sqrt{5}+5}{2}\end{pmatrix}$. Если $\lambda_6=3$, то $V_6=V_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Имеем пары
$\left\{0,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\left\{1,\begin{pmatrix}1\\0\\2\sqrt{5}-5\end{pmatrix}\right\},\left\{-1,\begin{pmatrix}1\\0\\2\sqrt{5}+5\end{pmatrix}\right\},\left\{2,\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\sqrt{5}-5}{2}\end{pmatrix}\right\},$
$\left\{-2,\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\sqrt{5}+5}{2}\end{pmatrix}\right\},\left\{3,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$
Решения строятся так:
$X_{ij}=(V_1,V_i,V_j)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda_i&0\\0&0&\lambda_j\end{pmatrix}(V_1,V_i,V_j)^{-1}(2\le i<j\le 5)$ – 6 решений.
$X_{ij}=(V_1,V_i,V_j)\begin{pmatrix}3&0&0\\0&\lambda_i&0\\0&0&\lambda_j\end{pmatrix}(V_1,V_i,V_j)^{-1}(2\le i<j\le 5)$ – 6 решений.
$X_{ij}=(V_i,V_j,V_k)\begin{pmatrix}\lambda_i&0&0\\0&\lambda_j&0\\0&0&\lambda_k\end{pmatrix}(V_i,V_j,V_k)^{-1}\ (2\le i<j<k\le 5)$ – 4 решения.

Таким образом, имеем 16 решений.

Пример 6. Уравнение

$$X^2 + \begin{pmatrix} 0 & k & \sqrt{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{13} & e & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & m & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & n & 0 \end{pmatrix} = = 0$$

$(k^2 + e^2 + m^2 + n^2 \neq 0)$ Имеет $\det A(\lambda) = \lambda^6 - 14\lambda^5 + 49\lambda^2 - 36 = 0$, собственные значения – $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1, \lambda_3, \lambda_4 = \pm 2, \lambda_5, \lambda_6 = \pm 3$.
Система для нахождения собственных векторов

$$\begin{cases} \lambda_i^2 V_{i1} + (k\lambda_i + m)V_{i2} + (\lambda_i\sqrt{13} + 6)V_{i3} = 0, \\ (\lambda_i^2 - 1)V_{i2} = 0 \\ (\lambda_{i\sqrt{13}} - 6)V_{i1} + (e\lambda_i + n)V_{i2} + \lambda_i^2 V_{i3} = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 = 1$, то $V_1 = \begin{pmatrix} (\sqrt{13} + 6)(e + n) - k - m \\ 24 \\ (\sqrt{13} - 6)(k + m) - e - n \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_1 = -1$, то $V_2 = \begin{pmatrix} (\sqrt{13} - 6)(e - n) + k - m \\ 24 \\ (\sqrt{13} + 6)(k - m) + e - n \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_3 = 2$, то $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$. Если $\lambda_4 = -2$, то $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_5 = 3$, то $V_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2-\sqrt{13}}{3} \end{pmatrix}$. Если $\lambda_6 = -3$, то $V_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2+\sqrt{13}}{3} \end{pmatrix}$.

Имеем пары $\{1, V_1\}, \{-1, V_2\}, \{2, V_3\}, \{-2, V_4\}, \{3, V_5\}, \{-3, V_6\}$.
Они определяют следующие решения:

$$X_1 = (V_1, V_2, V_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} (V_1, V_2, V_3)^{-1},$$

$$X_2 = (V_1, V_2, V_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} (V_1, V_2, V_4)^{-1},$$

$$X_3 = (V_1, V_2, V_5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (V_1, V_2, V_5)^{-1},$$

$$X_4 = (V_1, V_2, V_6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_1, V_2, V_6)^{-1},$$

$$X_5 = (V_1, V_3, V_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} (V_1, V_3, V_4)^{-1},$$

$$X_6 = (V_1, V_3, V_5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (V_1, V_3, V_5)^{-1},$$

$$X_7 = (V_1, V_3, V_6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_1, V_3, V_6)^{-1},$$

$$X_8 = (V_1, V_4, V_5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (V_1, V_4, V_5)^{-1},$$

$$X_9 = (V_1, V_4, V_6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_1, V_4, V_6)^{-1},$$

$$X_{10} = (V_1, V_5, V_6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_1, V_5, V_6)^{-1},$$

$$X_{11} = (V_2, V_3, V_4) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} (V_2, V_3, V_4)^{-1},$$

$$X_{12} = (V_2, V_3, V_5) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (V_2, V_3, V_5)^{-1},$$

$$X_{13} = (V_2, V_3, V_6) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_2, V_3, V_6)^{-1},$$

$$X_{14} = (V_2, V_4, V_5) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (V_2, V_4, V_5)^{-1},$$

$$X_{15} = (V_2, V_4, V_6) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_2, V_4, V_6)^{-1},$$

$$X_{16} = (V_2, V_5, V_6) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_2, V_5, V_6)^{-1},$$

$$X_{17} = (V_3, V_4, V_5) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (V_3, V_4, V_5)^{-1},$$

$$X_{18} = (V_3, V_4, V_6) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_3, V_4, V_6)^{-1},$$

$$X_{19} = (V_3, V_5, V_6) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_3, V_5, V_6)^{-1},$$

$$X_{20} = (V_4, V_5, V_6) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (V_4, V_5, V_6)^{-1},$$

Итак, данное уравнение имеет ровно 20 решений – максимально возможное число для квадратного уравнения с матрицами третьего порядка.

Замечание. Уравнение $X^2+XP+Q=0$ сводится к уравнению $X^2+PX+Q=0$ транспонированием. Наиболее общее уравнение $X^2+P_1X+XP_2+Q=0$ при помощи замены $Y = X + P_2$ сведём к уравнению

$$Y^2 - P_2Y - YP_2 + P_2^2 + P_1Y - P_1P_2 + YP_2 - P_2^2 + Q = 0,$$

то есть к уравнению $Y^2 + (P_1 - P_2)Y + Q - P_1P_2 = 0$, а это уравнение вида $X^2 + PX + Q = 0$.

Пример 7. Уравнение

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

не имеет решений. Здесь все собственные значения равны нулю. Значит, матрица X нильпотентна, поэтому X^2 не может иметь неравный 0 элемент во втором столбце и первой строке. Следовательно, решений нет.

Ссылки

[1] *Гельфанд С. И.* О числе решений квадратного уравнения // Глобус. Общематематический семинар. 2004. Вып. 1. С. 124–133.

УДК 378.14

Д. В. Глазков
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: d.glazkov@uniyar.ac.ru

Заметки, наблюдения, мысли о факультете и высшем образовании

Излагаются некоторые мысли автора по актуальным вопросам образования и науки, связанным с математическим факультетом ЯрГУ.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: образование, математика, естественные науки.

Пятидесятилетие математического факультета – весомый повод оглянуться на пройденный путь и внести свои «пять копеек» в общую летопись его истории, а также выразить какие-то критические мысли в связи с положением высшего образования и науки. Пусть это будет субъективный взгляд, охватывающий лишь некоторые темы, выходящий за рамки какого-то одного предлагаемого жанра, но отражающий какие-то аспекты пройденного пути.

За первую четверть XXI века система высшего образования прошла через череду реформ. Под лозунгами большей свободы выбора у студентов, улучшения качества программ обучения внедрялись пресловутые ФГОС (федеральные государственные образовательные стандарты), причем в несколько этапов со своей специфической терминологией вроде «компетенций». Фактически дело свелось к насаждению системы бакалавриат–магистратура без учета мнения ученых советов вузов кроме самых крупных, причем первая ступень получилась за счет урезания программ специалитета, рассчитанного на 5 лет. На естественнонаучных факультетах получался «недоспециалист». Магистратура, цель которой в болонской системе – открыть двери для перетекания студентов между вузами и разными направлениями обучения (с финансово обусловленным уклоном на экономико-управленческие MBA (master of business administration) для мотивированных занять «теплые кресла»), в наших реалиях во многом стала превращаться в фикцию, когда большая часть магистрантов идет работать, сводя все обучение к формальной сдаче зачетов и экзаменов по предлагаемым правилам. В этом случае весь интерес будущих магистров сводится к минимизации усилий при максимальном эффекте в виде нужной оценки. Предусмотренная учебными планами исследовательская деятельность проводится в значительной мере лишь теми, кто собрался связать жизнь с образованием и наукой. Вот на выходе и получаются «магистерские диссертации», подчас уступающие по качеству дипломным работам этих же авторов двухлетней давности. Все эти недостатки двухуровневой системы для естественнонаучных факультетов были видны еще в период ее опробации (1995–2010 гг.), но ни тогда, ни сейчас выводов как будто никто не делает. Похоже, реальные вопросы качества образования управленческий аппарат не заботят, во главу угла ставятся иные показатели. Если цель – «занять молодежь» (как, например, во Франции), то сам по себе студенческий билет от разного рода нежелательных влияний не защитит.

В отмеченный выше 25-летний период набор студентов на бюджетные места на 1 курс математического факультета постепенно вырос со 100 до 140 чел. С одной стороны, это является показателем развития и востребованности выпускников на рынке труда, прежде всего в сфере IT. С другой стороны, происходит определенное снижение мотивированности студентов, что выражается в снижении процента посещаемости занятий, росте объема пересдач, которые преподавателям не оплачиваются, хотя требуют немало рабочего времени. Выглядит несправедливо и требует некоторого внимания. Быть может, даже символические взносы в пользу вуза (порядка 100 р. в нынешних ценах, что меньше цены обеда в студенческой столовой) за возможность пересдачи несколько улучшили бы дисциплину в этом отношении? Или на это сработало бы, например, явное указание в дипломе количества пересдач в процессе обучения? Заодно появилась бы дополнительная информация к размышлению работодателям. Понятно, что современная жизнь несет много соблазнов, студенты старших курсов стремятся работать и зарабатывать, однако снижение среднего уровня выпускников представляется опасной тенденцией на фоне усложнения задач, которые ставит логика развития современных технологий. В этом отношении, например, увлечение студентов использованием искусственного интеллекта для решения типовых учебных заданий (с которыми, конечно, таким образом легко можно справиться) формирует у них привычку имитации деятельности без погружения в материал. Порой выясняется, что иные любители гаджетов не могут сами решить квадратное уравнение, а то и перемножить два числа на уровне таблицы умножения. В результате у таких «недоотчисленных еле-троечников» возникают разного рода иллюзии. Со временем в определенных условиях это может перерасти в привычку паразитировать. Сомнительный результат обучения.

Логика реформ образования и науки привела к ситуации, когда главной заботой преподавателя вуза стали формальные наукометрические показатели, от которых зависит его уровень доходов и статус. При этом сам процесс обучения и его результаты учитываются весьма опосредованно. Поэтому формально успешная стратегия, основанная на минимизации всех «посторонних» активностей, не дающих вклад в наукометрию, подчас оборачивается слабой мотивированностью реальной работы со студентами вплоть до идеи замены человека на робота, воспроизводящего некий учебный материал. Только вот как быть с потерей интереса учащихся к такому псевдо-обучению? Кроме того, те, кто готов, несмотря на низкий уровень оплаты, заниматься именно образованием (а на уровне школы эта проблема еще острее), неизбежно оказываются перегружены (пресловутая «peregruzka» 2011 г.?) не только занятиями, пересдачами, проверкой письменных контрольных работ и т. д., но и избыточной бюрократической отчетностью.

Примеров разного рода неудобств, которые проистекают из недр бюрократического аппарата, можно приводить сколько угодно, остановился бы на одном, публикационном. С некоторых пор в ГОСТ [1] (или [2] с поправками 2019 г.) по информации, библиотечному и издательскому делу попало странное правило ставить запятую между фамилией и инициалами авторов. Казалось бы, мелочь. Но какая, если вдуматься. Это правило очевидно противоречит и нормам русского языка, и формальным правилам написания «ФИО» в паспорте и официальных документах, да и здравому смыслу. Да, комментарии, доступные в интернет, поясняют, что впервые оно появилось в ГОСТ 7.1-2003 для сближения с некими международными стандартами на библиографические описания (что-то не наблюдал это в естественнонаучных журналах в том числе с Q1 на английском языке), а распространилось на списки литературы в ГОСТ 7.0.5-2008. Это правило осталось и в действующем ГОСТ Р 7.0.100–2018 [1], разработанном ИТАР-ТАСС совместно с РГБ и РНБ. Полагаю, что приложившие к этим регламентам руку деятели при написании своих имени и фамилии обходятся без противоестественных русскому человеку запятых? Да, отступления от ГОСТ возможны, он не носит всеобъемлюще обязывающий характер, но это стандарт, которому предписано следовать, в некоторых случаях не имея выбора. Очень хотелось бы вернуть в этой части нормы ГОСТ 7.0-80 без всяких запятых, понятные простым людям. В нынешних условиях было бы вполне объяснимое решение.

Критика критикой, но есть и какие-то небольшие наблюдения, которые могут добавить свои штрихи и «придать объем» общей картине жизни факультета и университета в целом. Например, на вручении «красных дипломов» в 2004 г. обратил внимание, что больше всех таких выпускников на фоне среднего показателя математического факультета (10) оказалось от экономического факультета (кажется, порядка 30), а меньше всех – от физического (4). Периодически появляющиеся на портале ЯрГУ и в соцсетях фотоматериалы более поздних лет позволяют заключить, что такое соотношение более-менее воспроизводится. От сравнения достижений отечественной экономической науки и физики воздержусь. Отдельный интересный вопрос, удалось ли с тех пор усилиями в том числе выпускников ЯрГУ подтянуть народное хозяйство? И вклад каких специалистов при этом оказался наиболее весом? Думается, такого рода подсчеты, а также анализ статистики по баллам ЕГЭ абитуриентов на входе и средний балл в дипломах на выходе могли бы стать или уже стали предметом какой-то научной работы.

Кафедра математического анализа в 2025 г. проводила на заслуженный отдых Владимира Степановича Климова – одного из старейших и выдающихся преподавателей факультета и университета в целом. Не будет преувеличением сказать, что почти все нынешние сотрудники математического факультета, а также многие коллеги с факультета ИВТ успели чему-либо у него научиться. Для потока ПМ-2004 (по году выпуска) в 1999 г. самая первая лекция в стенах ЯрГУ – это математический анализ в изложении Владимира Степановича. Наиболее трудоемкая и фундаментальная дисциплина на факультете. Далее четыре семестра и четыре экзамена – ни один предмет не требовал столько времени и внимания. Но и результат в виде объемного и целостного понимания языка математики на новом уровне стоил затраченных усилий. Курсы в его исполнении (кроме математического анализа, например, теория функций комплексного переменного), которые довелось прослушать автору этих строк в его бытность студентом, отличались продуманной структурой, глубоко проработанной подачей материала, ясными формулировками определений, теорем, четкими доказательствами.

Владимир Степанович Климов

Организовалась инициативная группа, преимущественно из выпускников школы № 33, участники которой поставили себе задачу набрать электронную версию лекций по математическому анализу в TeX. За основу были взяты конспекты автора этих строк, который в последствии узнал некоторые свои обозначения (например, начало и окончание доказательства) в уже готовом пособии. Соответственно, некоторое «бесконечно малое соучастие» в большом деле, можно сказать, состоялось уже на 1–2 курсе обучения.

В связи с определенным улучшением материально-технической оснащенности аудиторий – ноутбуками, проекторами, экранами – открылись новые возможности организации учебного процесса, в частности, использование презентаций для лекционных занятий. Это позволяет сократить время, которое традиционно используется для написания формул, изображения графиков и т. п., концентрируясь на содержательной стороне дела, на пояснениях и ответах на вопросы. Такой формат, очевидно, был востребован при дистанционном проведении занятий в период ковида, поэтому наиболее существенные курсы, такие как «Численные методы» для направления ПМИ, постепенно обрастали вспомогательным материалом, который отчасти готовился силами студентов старших курсов и магистрантов в счет зачетов по условно менее значимым предметам. Позже эти презентации были положены в основу учебного пособия по численным методам [3]. Таким образом, традиции плодотворного сотрудничества студентов и преподавателей в интересах общего дела продолжаются и в наше время. Хочется надеяться, что они сохранятся в будущем.

Ссылки

[1] ГОСТ Р 7.0.100–2018. Библиографическая запись. Библиографическое описание. – Текст : электронный // РГБ : [сайт]. – URL : https://www.rsl.ru/photo/!_ORS/5-PROFESSIONALAM/7_sibid/ГОСТ_Р_7_0_100_2018_1204.pdf (дата обращения: 02.09.2025).

[2] ГОСТ Р 7.0.100–2018. Библиографическая запись. Библиографическое описание. – Текст : электронный // ОД «Информация для всех» : [сайт]. – URL : https://ifap.ru/library/gost/701002018.pdf (дата обращения: 02.09.2025).

[3] *Нестеров П. Н., Глазков Д. В.* Численные методы : учебное пособие. Ярославль : ЯрГУ, 2025.

УДК 517.91

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru
e-mail: andkolesov@mail.ru

Система оценки знаний по курсу дифференциальных уравнений на основе контрольно-тестовых работ

Описаны принципы формирования, наполнения и особенности применения системы контрольно-тестовых работ по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений.
Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, контроль знаний.

Процесс усвоения знаний студентами может быть до некоторой степени ускорен и качественно улучшен за счет системы контрольных и контрольно-тестовых работ. Этот процесс является неотъемлемой частью учебного процесса, поскольку позволяет наладить обратную связь между преподавателем и студентами. Являясь принципиальными сторонниками традиционной формы обучения студентов с обычными лекциями и практическими занятиями, мы, тем не менее, полагаем, что проведение контрольной работы по дифференциальным уравнениям в форме теста вполне возможно и в некоторых случаях целесообразно. В свою очередь, рейтинговая накопительная система оценки успеваемости студентов может побудить их работать с материалами курса во время семестра, а не только лишь накануне сессии. Опишем далее разработанные нами контрольно-тестовые работы и принципы определения и использования рейтинга для оценки успеваемости студентов. Отметим, что задачи для тестов накапливались авторами в работах [1, 2, 3].

Классический курс обыкновенных дифференциальных уравнений, читаемый нами на математическом факультете и факультете ИВТ, занимает два семестра. За это время удается провести пять контрольных работ. Первая из этих работ посвящена дифференциальным уравнениям первого порядка. Эту работу нецелесообразно проводить в форме теста, поскольку в ней преподавателю важно проследить ход рассуждений студента и понять, где сделана ошибка, с тем, чтобы потом разобрать трудное для понимания место. Первое задание в этой работе состоит в нахождении общего решения и последующем определении решения начальной задачи Коши уравнения

$$y' = (y-a)(y-b)(y-c), \quad y(x_0) = y_0,$$

где $a < b < c$, x_0, y_0 – некоторые действительные числа. Найденное решение требуется, ко всему прочему, еще и изобразить графически. Данное задание имеет принципиальное значение по многим причинам. Во-первых, общее решение (точнее, общий интеграл) записывается некоторыми студентами без учета особых решений, обращающих правую часть уравнения в нуль. Во-вторых, упускается из виду, что решение начальной задачи Коши с начальными условиями $y_0 < a$ или $y_0 > b$ за конечное изменение переменной x может устремиться к бесконечности. Указанные особенности данного уравнения позволяют проконтролировать степень усвоения сразу нескольких начальных понятий курса. Вторым заданием в контрольной работе идет задача из числа однородных уравнений или сводящихся к ним. Третье задание – линейное дифференциальное уравнение, его решение, как и решение первой задачи, представляет принципиальный интерес и должно быть внимательно проверено. Четвертым заданием обычно является уравнение Бернулли (иногда Риккати), сводящееся к линейному заменой. Наконец, последнее пятое задание посвящено уравнениям в полных дифференциалах и интегрирующим множителям.

Вторая контрольная работа посвящена линейным дифференциальным уравнениям старших порядков и системам. Данная работа вполне подходит для проведения в форме теста. В нее входят три задания на линейные дифференциальные уравнения с различными типами неоднородностей. В первом задании неоднородностью является квазимногочлен, во втором – тригонометрический квазимногочлен. Неоднородность в третьем задании имеет общий вид, и решать его следует методом вариации произвольных постоянных. В четвертом и пятом заданиях требуется найти общее решение линейной системы. Обычно матрица системы в одном из заданий имеет комплексные собственные числа, а в другом – кратные вещественные, что позволяет проверить степень усвоения данного материала.

Третья контрольная проводится в начале четвертого семестра. Она предназначена для выяснения степени выживаемости знаний за предыдущий семестр. В нее снова входят системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Первые два задания практически копируют два последних задания из предыдущей работы. Третье и четвертое задания содержат неоднородные линейные системы, причем неоднородность одного из них представляет собой тригонометрический квазимногочлен, а другого – неоднородность общего вида. При выполнении этих заданий студенты должны продемонстрировать умение решать линейные неоднородные системы методами неопределенных коэффициентов и вариации произвольной постоянной. Наконец, последнее в данной контрольной работе задание посвящено вычислению матричной экспоненты. Данная работа, как и предыдущая, может выполняться в форме теста.

В четвертой контрольной работе собраны задачи, относящиеся к одной из центральных тем курса – теории устойчивости. Первое задание посвящено решению задачи об устойчивости первым методом Ляпунова. Данное задание, при всей кажущейся простоте, имеет обширное поле для ошибок. Связаны они, как правило, с неполным усвоением условий теоремы об устойчивости по первому приближению. Чаще всего студенты эти условия (особенно оценку нелинейности) даже не проверяют. Вторая задача посвящена второму методу Ляпунова, в ней необходимо найти функцию Ляпунова или Четаева и решить, тем самым, проблему устойчивости нулевого решения. В третьей задаче требуется определить устойчивость многочлена методом Рауса–Гурвица или частотным критерием Михайлова. В четвертой задаче требуется построить фазовый портрет линейной системы на плоскости. В пятом задании решаются задачи об ограниченности или периодичности решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Очевидно, что они тесно связаны с задачей об устойчивости. Данная контрольная работа существует и в виде теста, и в виде обычной контрольной работы. Авторы склоняются к мысли, что эта работа должна проводиться все же стандартным способом для того, чтобы учесть ход решения предложенных задач (особенно первой, четвертой и пятой).

Последняя в курсе (пятая) контрольная работа содержит задания на метод малого параметра и краевые задачи. Первые два задания работы требуют построения приближенного решения методом малого параметра. В третьем задании необходимо найти функцию Грина для представленной в нем краевой задачи. В четвертом задании предлагается найти собственные числа и собственные функции для некоторой краевой задачи второго порядка. В последнем задании требуется построить решение начальной задачи Коши линейного уравнения с непостоянными коэффициентами в виде степенного ряда. Задачи данной контрольной работы, особенно связанные с разложением решений в ряды (как по малому параметру, так и по независимой переменной), решаются обычно с большим трудом и требуют от преподавателя подбора, по возможности, простых задач.

Правила определения рейтинга и выставления оценок просты. Каждая контрольная работа оценивается по десятибалльной шкале. Для того чтобы она была зачтена, необходимо набрать не менее шести баллов. Студент, не сдавший одну из работ, считается не выполнившим программу курса и не допускается к экзамену.

Проверка степени усвоения знаний студентами является неотъемлемой частью учебного процесса, поскольку позволяет наладить прочную обратную связь между преподавателем и студентами. Необходимость получения положительной оценки мотивирует студентов к лучшему изучению материала лекционных и практических занятий. С другой стороны, анализ типичных ошибок, встречающихся в контрольно-тестовой работе, позволяет преподавателю скорректировать подачу материала с целью лучшего объяснения особенно трудных для студентов мест.

Ссылки

[1] *Глызин С. Д., Нестеров П. Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2016. 192 с.

[2] *Глызин С. Д., Марушкина Е. А.* Дифференциальные и разностные уравнения и системы в примерах и задачах: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ. 2017. 80 с.

[3] *Глызин С. Д., Толбей А. О.* Практический курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ. 2017. 76 с.

УДК 517.91

С. Д. Глызин, А. О. Толбей
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru
e-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru

Формирование заданий для контрольных работ по ОДУ

Курс обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) является фундаментальным разделом высшей математики, изучаемым в большинстве технических и естественнонаучных направлений, его освоение закладывает основу для понимания многих задач из широкого спектра приложений. Контрольные работы играют ключевую роль в процессе обучения, позволяя оценить степень усвоения студентами теоретического материала и сформировать у них навыки решения типовых задач. Однако эффективность контрольной работы во многом определяется качеством составления ее заданий. Нами предлагаются некоторые приемы формирования заданий контрольных работ.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, контрольная работа, разработка заданий, контроль знаний.

Формирование надежной системы контроля знаний по ОДУ имеет особую значимость по следующим причинам.

1. Фундаментальность дисциплины. ОДУ являются базой для изучения более сложных математических моделей, используемых в прикладных исследованиях. Недостаточное освоение ОДУ влечет за собой трудности в последующем обучении.

2. Развитие аналитического мышления. Решение задач по ОДУ требует от студентов не только знания алгоритмов, но и умения анализировать структуру уравнений, выбирать подходящие методы решения, интерпретировать результаты.

3. Подготовка к практической деятельности. Во многих профессиональных сферах инженерам, исследователям и аналитикам приходится работать с моделями, основанными на дифференциальных уравнениях. Умение решать такие задачи является важным профессиональным навыком.

4. Обеспечение объективности оценки. Грамотно составленные контрольные работы позволяют объективно оценить уровень подготовки каждого студента, выявить пробелы в знаниях и скорректировать учебный процесс.

При составлении заданий для контрольных работ по ОДУ следует придерживаться следующих принципов: соответствие учебной программе, разнообразие типов заданий, учет уровня сложности, четкость формулировок, возможность проверки (все задания должны иметь однозначный ответ или четкую методику проверки), соответствие временным рамкам (объем и сложность заданий должны соответствовать отведенному на контрольную работу времени), связь с компетенциями (каждое задание должно быть направлено на формирование или проверку одной или нескольких компетенций из списка «знать», «уметь», «владеть»).

Авторы предлагают один из способов генерирования заданий для контрольной работы по ОДУ. Особо отметим возможность получения близких по сложности заданий для различных вариантов [1], [2].

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение вида

$$(x+ay)dx+(bx\pm y)dy=0, \tag{1}$$

в котором действительные константы a, b будем выбирать так, чтобы получившийся общий интеграл был по возможности простым. При условии $a\neq b$, выполним стандартную замену $y=tx$, $dy=tdx+xdt$, в результате которой получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{x}=-\frac{(b+t)dt}{t^2+(a+b)t\pm 1}. \tag{2}$$

Вид интеграла правой части (2) определяется корнями квадратных трехчленов $t^2+(a+b)t+1=0$ или $t^2+(a+b)t-1=0$. В первом случае при $D\equiv(a+b)^2-4>0$ имеем пару действительных корней и логарифмы в ответе, при $D=0$ корни кратные и получаются обратные функции t, а при $D<0$ выходят логарифмы и арктангенсы. Во втором случае корни всегда вещественные, а следовательно, будут получаться логарифмы линейной функции от t.

В приведенных ниже таблицах для каждой из этих ситуаций содержатся такие значения a и b, чтобы нахождение интегралов не сопровождалось громоздкими вычислениями.

Пусть сначала $D=0$. Искомый набор значений a, b приведен ниже, а затем рассмотрен один из конкретных примеров.

Знаменатель	**Корни**	**Выражение для a и b**	**Примеры a и b**
$(t+1)^2=0$	$t_{1,2}=-1$	$a+b=2$	$a=1/2,\ b=3/2$; $a=3,\ b=-1$; $a=4,\ b=-2$.
$(t-1)^2=0$	$t_{1,2}=1$	$a+b=-2$	$a=1/2,\ b=-5/2$; $a=-3,\ b=1$; $a=2,\ b=-4$.

Пример 1. *Возьмем $a=3$, $b=-1$ и найдем общее решение уравнения*

$$(x+3y)dx+(-x+y)dy=0.$$

Решение. После замены $y = tx$ и разделения переменных получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1-t)}{(1+t)^2}dt, \quad t \neq -1,$$

откуда, после интегрирования левой и правой частей и возвращения к исходным переменным, имеем

$$\ln|x+y| + \frac{2x}{x+y} = C, \quad C = \mathrm{Const}.$$

Непосредственной подстановкой убедимся, кроме того, что $t = -1$ (в исходных переменных $y = -x$) также является решением.

Случай $D < 0$ удобно рассмотреть при $a + b = 0$. В следующей таблице приведены значения параметров a, b, удовлетворяющих этим условиям.

Знаменатель	**Выражение для a и b**	**Примеры a и b**
$t^2 + 1 = 0$	$a + b = 0$	$a = 1/2$, $b = -1/2$; $a = 1$, $b = -1$; $a = 2$, $b = -2$.

Пример 2. *Возьмем* $a = 2$, $b = -2$ *и найдем общее решение уравнения*

$$(x + 2y)dx + (-2x + y)dy = 0.$$

Решение. Сделаем в исходном уравнении замену $y = tx$, получим

$$(1 + 2t)dx + (-2 + t)(xdt + tdx) = 0,$$

откуда после разделения переменных имеем

$$\frac{t-2}{t^2+1}dt = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части, получаем

$$\int \Big(\frac{t}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1}\Big)dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\,\mathrm{arctg}(t) = -\ln(Cx)$$

или

$$\ln(y^2 + x^2) - 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = C.$$

Перейдем теперь к случаю, когда знаменатель уравнения (2) имеет два действительных корня t_1 и t_2 ($t_1 \neq t_2$). Так получается, если $D > 0$ в первом случае и для любых действительных a, b во втором. При этом интеграл в правой части (2) раскладывается на простейшие дроби вида

$$\frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2}.$$

Интегрирование даёт сумму логарифмов, а после возврата к исходным переменным и потенцирования, общее решение может быть записано в неявной форме в виде многочлена относительно x и y.

В следующей таблице для корней t_1, t_2, указанных в первом столбце, приведены примеры значений a и b. В первой строке даны значения для задачи (1) со знаком плюс, а в строках 2–4 – со знаком минус.

Корни	**Выражение для** a **и** b	**Примеры** a **и** b
$t_1 = 2,\ t_2 = 1/2$	$a + b = -\frac{5}{2}$	$a = -2$, $b = -1/2$; $a = 1$, $b = -7/2$; $a = -1$, $b = -3/2$.
$t_1 = 1$, $t_2 = -1$	$a + b = 0$	$a = 2$, $b = -2$.
$t_1 = 1/3$, $t_2 = -3$	$a + b = -8/3$	$a = -2$, $b = -2/3$.
$t_1 = 1/2$, $t_2 = -2$	$a + b = -3/2$	$a = -1$, $b = -1/2$.

Пример 3. *Найти общее решение*

$$(x - y)dx + \Big(-\frac{1}{2}x - y\Big)dy = 0.$$

Решение. Подставляя $y = tx$, после упрощений получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{t + 1/2}{t^2 - 3t/2 - 1}dt.$$

Раскладывая правую часть на простейшие дроби и вычисляя интегралы получаем, что

$$-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t - 1/2} - \frac{3}{5}\int\frac{dt}{t + 2} = -\frac{2}{5}\ln\Big|t - \frac{1}{2}\Big| - \frac{3}{5}\ln|t + 2|.$$

После обратной замены и потенцирования приходим к следующей неявной формуле для общего решения:

$$(2y - x)^2(y + 2x)^3 = C.$$

Предложенный в работе подход к формированию заданий для контрольных работ по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений обеспечивает методологическую гибкость, дидактическую целесообразность и техническую воспроизводимость. Возможность варьировать значения коэффициентов a и b в однородных уравнениях вида (1) позволяет преподавателю составлять равнозначные по сложности, но формально различные варианты заданий, что способствует объективной оценке знаний и снижает риск списывания.

Анализ структуры решений – в зависимости от корней знаменателя – позволяет заранее прогнозировать тип интегралов (логарифмы, арктангенсы, рациональные функции) и, следовательно, целенаправленно регулировать уровень сложности задач в соответствии с учебными целями и компетенциями обучающихся.

Ссылки

[1] *Глызин С. Д., Нестеров П. Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2016. 192 с.

[2] *Глызин С. Д., Толбей А. О.* Практический курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2017. 76 с.

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03

В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
e-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

О системах уравнений в свободных абелевых группах с ограничениями на решения

Устанавливается алгоритмическая неразрешимость проблемы совместности для систем уравнений в свободных абелевых группах с некоторыми ограничениями на решения.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: свободная абелева группа, система уравнений в группе, совместная система уравнений.

В 60-е годы прошлого века С.И. Адян сформулировал достаточно общую „***Программу***“:

„***Уточнение границы между алгоритмически разрешимыми и алгоритмически неразрешимыми проблемами в математике и ее приложениях***“.

Исследования в этом направлении достаточно активно ведутся уже более полувека как у нас в стране, так и за рубежом, прежде всего в области „Алгоритмических проблем алгебры, математической логики, теории чисел и теории алгоритмов“. Условно можно выделить два дополняющих друг друга направления исследований.

1) Построение „***все более сложных***“ *алгоритмически* ***разрешимых проблем***.

2) Построение „***все более простых***“ *алгоритмически* ***неразрешимых проблем***.

Однако, на наш взгляд, пока еще нельзя говорить об успешном завершении „ ***Программы С.И. Адяна***“.

Содержащиеся в статье результаты, на наш взгляд, вписываются в общий процесс реализации „***Программы С.И. Адяна***“.

Определим некоторые понятия, относящиеся к системам уравнений в произвольной группе G.

Определение 1. *Системой уравнений с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ в группе G называется выражение вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m), \tag{1}$$

где $w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ *и* $u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ *– слова в алфавите*

$$\{\, x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1} \,\} \cup G \quad (a_1, \ldots, a_m \in G).$$

Определение 2. *Набор* $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ *элементов группы* G *называется* ***решением*** *системы (1), если при любом* i $(i = 1, \ldots, k)$ *в группе* G *выполняется равенство*

$$w_i(g_1, \ldots, g_n, a_1, \ldots, a_m) \;=\; u_i(g_1, \ldots, g_n, a_1, \ldots, a_m).$$

Определение 3. *Система уравнений (1) в группе* G *называется* ***совместной****, если она имеет решение в этой группе.*

Определение 4. ***Проблема совместности*** *для систем уравнений в группе* G*: по произвольной системе уравнений в группе* G *определить, является ли она совместной, т.е. имеет ли она решение в этой группе.*

В 1982 г. Г. С. Маканин [1] получил фундаментальный результат в теории систем уравнений в свободных группах и полугруппах, который является одним из важнейших математических результатов второй половины XX века, полученных в „Теории алгоритмов“ и в „Теоретической информатики“ – полное решение проблемы совместности для систем уравнений в свободных группах – он построил такую вычислимую (рекурсивную) функцию $\Phi(x)$, что если данная система уравнений с длиной записи d имеет решение в свободной группе, то длина каждой компоненты минимального (по максимальной длине компоненты) решения не превосходит числа $\Phi(d)$. Это дает простой переборный алгоритм („Алгоритм Британского музея“) для распознавания совместности произвольной системы уравнений в свободной группе.

После построения Г. С. Маканиным [1] алгоритма, решающего проблему совместности для систем уравнений в свободных группах, особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных группах с различными „*не слишком сложными*“ ограничениями на решения.

Г. С. Маканин поставил в „Коуровской тетради“ [2] следующую проблему для уравнений в свободных группах.

9.25. *Указать алгоритм, который по уравнению*

$$w\,(\, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m \,) \;=\; 1$$

в свободной группе F_m *и списку конечно порожденных подгрупп* $H_1, \ldots, H_n$ *группы* F_m *позволял бы узнать, существует ли решение этого уравнения с условием*

$$x_1 \,\in\, H_1, \ldots, x_n \,\in\, H_n.$$

Первые положительные результаты в направлении решения этой проблемы были получены А. Ш. Малхасяном [3].

Ф. Дикерт [4] показал, что проблема определения по произвольному уравнению

$$w\,(\, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m \,) \;=\; 1$$

в свободной группе F_m и списку *регулярных подмножеств* (языков) $H_1,\ldots,\ H_n$ группы F_m, существует ли решение этого уравнения с условием

$$x_1 \in H_1, \ldots, x_n \in H_n,$$

разрешима и принадлежит классу **PSPACE**. Так как конечно порожденные подгруппы являются регулярными подмножествами, то тем самым решается и проблема Г.С. Маканина.

Представляет интерес исследование различных обобщений проблемы Г. С. Маканина для свободных групп различных многообразий групп.

Обозначим через A_m свободную абелеву группу со свободными образующими a_1, ..., a_m и с мультипликативной системой обозначений, т. е.

$$A_m = \langle\langle\, a_1, \ldots, a_m \,|\, \{\, a_i a_j = a_j a_i \,|\, 1 \le i < j \le m \,\}\,\rangle\rangle.$$

При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 обычно пишут a и b соответственно. Конечно, A_1 – это бесконечная циклическая группа, изоморфная аддитивной группе $\mathbb{Z}$ целых чисел.

По аналогии с проблемой 9.25 Г. С. Маканина рассмотрим систему уравнений в группе A_m с подгрупповыми ограничениями на решения, т.е. систему вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \;=\; u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)\, \& \\ x_1 \in H_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in H_n,$$

где $H_1,\ldots,\ H_n$ – конечно порожденные подгруппы группы A_m.

Нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Существует алгоритм, который по системе уравнений в группе A_m с подгрупповыми ограничениями на решения*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \;=\; u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)\, \& \\ x_1 \in H_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in H_n,$$

где $H_1,\ldots,\ H_n$ – конечно порожденные подгруппы группы A_m, отвечает на вопрос, имеет ли она решение.

Введем предикат

$$Deg(x, y) \iff y \text{ – степень } x.$$

Если g и h – произвольные элементы группы G, то справедлива эквивалентность

$$G \models Deg(g, h) \iff h \in subgroup(g).$$

Для аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел справедлива эквивалентность

$$\mathbb{Z} \models Deg(g, h) \iff g \text{ делит } h \quad (g \,|\, h).$$

Из известного результата А. П. Бельтюкова [5] сразу следует, что *существует алгоритм, который позволяет по произвольной системе уравнений и неравенств в группе A_1 вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n,a) \;=\; u_i(x_1,\ldots,x_n,a)\,\&\,\mathop{\&}_{(i,j)\in A} Deg(x_i,x_j)\,\&$$
$$\mathop{\&}_{t=1}^{q} w_t(x_1,\ldots,x_n,a) \;\neq\; u_t(x_1,\ldots,x_n,a)\,\&\,\mathop{\&}_{(s,l)\in B} \neg Deg(x_s,x_l),$$

где A и B – подмножества множества упорядоченных пар натуральных чисел $\{(s,t)|1 \le s,t \le n\}$, ответить на вопрос, имеет ли она решение в этой группе.

В то же время справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Невозможно создать алгоритм, который позволяет по произвольной системе уравнений в группе A_2 вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) \;=\; u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)\,\&\,\mathop{\&}_{(i,j)\in A} Deg(x_i,x_j),$$

где A – подмножество множества упорядоченных пар натуральных чисел $\{(s,t)|1 \le s,t \le n\}$, ответить на вопрос, имеет ли она решение в этой группе.

Доказательство. Рассмотрим предикаты

$$T_{a\to b}(\,x_1,\,x_2\,) \iff$$
$$(\,Deg(a,x_1)\;\&\;Deg(b,x_2)\,)\;\&\;(\,\exists\, x,y\,)\,(\,x=ab\;\&\;Deg(x,y)\;\&\;y\;=x_1x_2\,);$$
$$Mult\,(\,x_1,\,x_2,\,x_3)\iff$$
$$(\,\exists\, x,y,z\,)\,(\,T_{a\to b}\,(\,x_2,\,x)\;\&\;y=x_1b\;\&\;Deg(\,y,z\,)\;\&\;z\;=\;x_3x\,).$$

Легко понять, что для произвольных элементов g и h группы A_2:

$$A_2 \models T_{a\to b}\,(\,g,\,h\,) \iff \text{\textit{существует такое целое число} } p, \text{ \textit{что} } g\;=\;a^p,\;h\;=\;b^p.$$

Нетрудно показать, что для произвольных целых чисел s, t и r имеет место эквивалентность

$$A_2 \models Mult\,(\,a^s,\,a^t,\,a^r\,) \quad\iff\quad r\;=\;s\,\cdot\,t.$$

Воспользуемся *целочисленным вариантом непосредственного следствия фундаментальной теоремы М. Дэвиса – Х. Путнама – Дж. Робинсон [6] – Ю. В. Матиясевича [7] (ДПРМ-теоремы) о диофантовости рекурсивно перечислимых множеств:*

Для произвольного рекурсивно перечислимого множества U натуральных чисел можно построить такую формулу $\Phi_U(x_1)$ вида

$$(\,\exists\, x_2,\,\ldots,\,x_p\,)\,\Psi, \quad \text{\textit{где}} \quad \Psi\;=\;\mathop{\&}_{i=1}^{s}\varphi_i$$

и каждая формула φ_i *имеет один из следующих видов:*

$$x_l + x_j = x_t, \quad x_j = x_l, \quad x_l \cdot x_j = x_t, \quad x_j = c,$$

где c *– целое число, что для произвольного натурального числа* k *имеем*:

$k \in U$ *тогда и только тогда, когда формула* $\Phi_U(k)$ *истинна на кольце целых чисел* $\mathbb{Z}$.

Пусть U – рекурсивно перечисленное множество, а $\Phi_U(x_1)$ – соответствующая формула.

По формуле $\Phi_U(x_1)$ построим формулу $\Phi_U^{(1)}(x_1)$ следующим образом:

$$\Phi_U^{(1)}(x_1) \rightleftharpoons (\exists x_2, \ldots, x_p)(\Psi_1 \mathbin{\&} \mathop{\&}_{i=2}^{p} Deg(a, x_i)),$$

где Ψ_1 получено из Ψ заменой каждой формулы φ_i вида $x_l + x_j = x_t$ на $x_l x_j = x_t$, формулы вида $x_l x_j = x_t$ – на $Mult(x_l, x_j, x_t)$, формулы вида $x_j = x_l$ – на $x_j = x_l$, а формулы вида $x_j = c$ – на $x_j = a^c$.

Подходящим образом переименовав переменные в формуле $\Phi_U^{(1)}(x_1)$ приведем полученную формулу $\Phi_U^{(2)}(x_1)$ к виду

$$(\exists x_2, \ldots, x_q)(\mathop{\&}_{i=1}^{l} w_i(x_1, x_2, \ldots, x_q, a, b) = u_i(x_1, x_2, \ldots, x_q, a, b) \mathbin{\&} \\ \mathop{\&}_{(i,j)\in A} Deg(x_i, x_j)),$$

где A – некоторое множество упорядоченных пар чисел.

В итоге получим:

для произвольного натурального числа k *справедлива эквивалентность*:

$$k \in U \iff$$

$$A_2 \models (\exists x_2, \ldots, x_q)(\mathop{\&}_{i=1}^{l} w_i(a^k, x_2, \ldots, x_q, a, b) = u_i(a^k, x_2, \ldots, x_q, a, b) \mathbin{\&} \\ \mathop{\&}_{(i,j)\in A} Deg(x_i, x_j)).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно в качестве U взять рекурсивно перечислимое, но нерекурсивное множество. □

В качестве непосредственного следствия получаем следующее утверждение для целочисленных систем линейных уравнений.

Следствие. *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной системе линейных уравнений с целыми коэффициентами вида*

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ldots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
b_{11}y_1 & + & b_{12}y_2 & + & \ldots & + & b_{1n}y_n & = & c_1 \\
b_{21}y_1 & + & b_{22}y_2 & + & \ldots & + & b_{2n}y_n & = & c_2 \\
 & & & & \ldots & & & & \\
b_{m1}y_1 & + & b_{m2}y_2 & + & \ldots & + & b_{mn}y_n & = & c_m
\end{array}$$

и по произвольному подмножеству A множества $\{(s,t)|1 \leq s,t \leq n\}$ ответить на вопрос, имеет ли эта система такое целочисленное решение

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1.h_2, \ldots, h_n),$$

что при $(i,j) \in A$: (g_j, h_j) – $\mathbb{Z}$ – кратно (g_i, h_i), т.е. существует такое целое число m, что $(g_j, h_j) = m(g_i, h_i)$.

Из указанного выше результата А. П. Бельтюкова [5] сразу следует, что *существует алгоритм, позволяющий по произвольной системе линейных уравнений с целыми коэффициентами*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ldots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

и по произвольному подмножеству A множества $\{(s,t)|1 \leq s,t \leq n\}$ ответить на вопрос, имеет ли эта система такое целочисленное решение

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n),$$

что при $(i,j) \in A$: g_j – $\mathbb{Z}$ – кратно g_i, т. е. существует такое целое число m, что $g_j = mg_i$ (g_i делит g_j, $g_i | g_j$).

Ссылки

[1] *Маканин Г. С.* Уравнения в свободных группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46, № 6. С. 1199–1274.

[2] Коуровская тетрадь. Издание 17-е, дополненное и включающее Архив решенных задач // Новосибирск: Институт математики СО РАН. 2010.

[3] *Малхасян А. Ш.* О разрешимости в подгруппах уравнений в свободной группе // Сборник „Прикладная математика". 1986. Т. 2. С. 42 –47.

[4] *V. Diekert.* Makanin's Algorithm for Solving Word Equations with Regular Constraints. Preliminary version of the chapter in M. Lothaire. Algebraic Combinatorics on Words. Report Nr. 1998/02. Fakultat Informatik. Universitat Stuttgart. 1998.

[5] *Бельтюков А. П.* Разрешимость универсальной теории натуральных чисел со сложением и делимостью // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 60. С. 15–28.

[6] *M. Davis.* The Decision Problem for Exponential Diophantine Equations // Ann. Math. 1964. Vol. 74. P. 425–436.

[7] *Матиясевич Ю. В.* Диофантовы множества // Успехи матем. наук. 1972. Т. 27, № 5(167). С. 185–222.

УДК 512.54

Л. С. Казарин
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: lsk46@mail.ru

Конечные почти простые группы с тройной факторизацией

Группа G называется почти простой, если $L \leq G \leq Aut(L)$ для некоторой простой неабелевой группы L. Изучаются конечные почти простые группы G, обладающие тройкой собственых подгрупп A, B и C, для которых группа G представима в виде $G = AB = AC = BC$. Эта задача возникает при изучении конечных групп и известна по меньшей мере 90 лет. Так, Ф. Холл в 1928 г. показал, что любая разрешимая группа, порядок которой делится на три различных простых числа, имеет тройную факторизацию подгруппами A, B и C, имеющими взаимно простые индексы. Х. Виланд доказал в 1960 г., что верно и обратное: любая конечная группа, обладающая тройной факторизацией разрешимыми подгруппами взаимно простых индексов, разрешима. С использованием результатов, полученных в 1990 г. М. Либеком, Ш. Прэгер и Я. Сакслом, определяются почти простые группы, обладающие тройной факторизацией.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: группа, подгруппа, факторизация, простая группа, группа лиева типа.

Отметим, что при выяснении строения почти простой группы G с цоколем L, обладающей тройной факторизацией, естественно рассматривать только максимальные подгруппы этой группы, не содержащие нормальной подгруппы L. Именно такие максимальные подгруппы и рассматриваются в работе М. Либека, Ш. Прэгер и Я. Саксла [1].

До недавнего времени известными простыми неабелевыми группами, обладающими тройной факторизацией, были группы $L_2(9) \simeq A_6$ и $P\Omega_8^+(q)$.

В докладе существенно расширен список групп, обладающих тройной факторизацией. Основные источники – работа [1], а также Атлас простых групп [2]. В связи с этим принятые нами обозначения в большинстве случаев следуют обозначениям [1]. Исключение делается лишь для групп из списка [2].

Ранее автором анонсировалось строение конечных простых групп с тройными факторизациями (доклад на конференции [3]). В настоящем сообщении рассматриваются почти простые группы.

Как известно, простые неабелевы конечные группы распадаются на следующие семейства групп.

A. Классические простые группы:

1) линейные группы $L_n(q)$;

2) симплектические группы $PSp_{2n}(q)$;

3) унитарные группы $U_n(q)$;

4) ортогональные группы (их три семейства: $P\Omega_n^\eta(q)$, где $\eta = \pm$ для $n = 2m$ и $\eta = 0$ для нечетного числа n).

B. Исключительные простые группы лиева типа:
$G_2(q)\,(q > 2), F_4(q), E_6(q), E_7(q), E_8(q)^2B_2(q),^2G_2(q),^2F_4(q),^3D_4(q),^2E_6(q)$.

C. Знакопеременные группы $A_n\,(n \geq 5)$.

D. 26 спорадических простых групп (список можно найти в [2]).

Вначале рассматриваются тройные факторизации почти простых групп лиева типа. Каждая из этих групп имеет в своем определении параметр q – порядок конечного поля определения ($q = p^e$, где p – характеристика поля). С параметром q связаны некоторые важные простые делители, определяющие строение подгрупп, участвующих в факторизациях. Обычно эти простые делители делят числа вида $q^m - 1$, где параметр m, в свою очередь, связан с размерностью естественного модуля классической группы. Например, если простая группа $L = L_n(q)$, где $n \geq 5$ и $n \geq 8$ при $q = 2$, то q_n – это примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, т. е. первообразный корень степени $q^n - 1$ из единицы в поле $GF(q^n)$. Если $q = p^e$, где p – характеристика поля $GF(q)$, то число $q_n \equiv 1 \pmod{en}$. Таблица 2.5 в [1] определяет строение максимальной подгруппы H группы лиева типа, имеющей такой простой делитель её порядка. В свою очередь, имеются «большие» (геометрические) подгруппы, порядки которых делятся на соответствующие «большие» простые числа. Эти конструкции были открыты М. Ашбахером в 1984 г., и их описание содержится также в [1] (и используется нами).

Основная часть анализа простых групп лиева типа, обладающих тройной факторизацией, будет связана с классическими группами, так как в случае исключительных групп факторизаций немного и они ввиду [1] (Таблица 5) тройными факторизациями не обладают.

Заметим, что если почти простая группа $G = AB$, где A и B – максимальные подгруппы G, то

$$\pi(G) \leq \pi(A) \cup \pi(B),$$

и уже выбор подгруппы A, порядок которой делится на некоторое «большое» простое число r, связанное с выбором класса Ашбахера, куда эта подгруппа попадает, диктует и выбор простого числа s, также связанного с другой максимальной подгруппой. Обычно, пара чисел (r, s) определяется почти однозначно. Но в таком случае появление третьей подгруппы C, порядок которой не делится ни на r, ни на s, обычно вызвает коллизию, исключающую тройную факторизацию.

В качестве промежуточного итога наших рассуждений, подкрепленных вычислениями, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть G – классическая почти простая группа лиева типа , обладающая тройной факторизацией максимальными геометрическими подгруппами A,B и C. Тогда либо $L = L_2(q)$, либо $PSp_{2m}(2)$, либо $P\Omega_8^+(q)$.*

Термин *геометрическая подгруппа* разъясняется в самом начале в [1]. Условие теоремы 1 –необходимое, но не достаточное.

Таким образом, оставшиеся возможности для групп лиева типа появляются лишь в случаях, когда одна из подгрупп A, B или C не является геометрической. Впрочем, большая часть информации о факторизациях групп лиева типа, спорадических и знакопеременных групп содержится в таблицах 1–6 из [1].

Отметим следующий неожиданный факт.

Теорема 2. *Пусть группа $L = PSp_{2m}(2)$, где простое число p делит m и $a = \frac{m}{p}$. Тогда группа L обладает тройной факторизацией подгруппами A,B и C, где $A \simeq O_{2m}^+(2), B \simeq O_{2m}^-(2)$, а $C \simeq Sp_{2a}(2^p)p$.*

Теорема 2 показывает, что имеются простые группы лиева типа сколь угодно большой размерности, обладающие тройными факторизациями. Следующий случай возникает для непростой группы G.

Теорема 3. *Пусть группа $G = L.2$, где $L = PSp_{2m}(4)$, и простое число p делит m, а $a = \frac{m}{p}$. Тогда группа L обладает тройной факторизацией подгруппами A,B и C, где $A \simeq O_{2m}^+(4), B \simeq O_{2m}^-(4)$, а $C \simeq Sp_{2a}(4^p)p$.*

Частные случаи для групп лиева типа малой размерности. Имеется следующая тройная факторизация группы $L = P\Omega_7(3)$:

$$L = AB = AC = BC \text{ для } A = L_4(3) : 2, B = Sp_6(2), C = G_2(3).$$

Используем информацию из Атласа [2]. Индуцированный с главного характера 1_A группы A имеет следующее разложение по неприводимым характерам группы L:

$$1_A^* = 1_L + 182a + 195a.$$

В свою очередь, разложение по неприводимым характерам группы L индуцированного для главного характера 1_B группы B имеет следующий вид:

$$1_B^* = 1_L + 168a + 260a + 2730a.$$

Наконец, разложение по неприводимым характерам группы L индуцированного главного характера 1_C группы C имеет вид:

$$1_C^* = 1_L + 260b + 819b.$$

Так как $(1_A^*, 1_B^*) = (1_A^*, 1_C^*) = (1_C^*, 1_B^*) = 1$, то имеют место факторизации $L = AB = AC = BC$, что и требовалось установить.

Наиболее интересным является наличие нескольких тройных факторизаций группы $L = P\Omega_8^+(q)$.

Пусть A – подгруппа группы L, изоморфная $P\Omega_7(q)$. У группы L имеется внешний автоморфизм τ порядка 3, называемый триалити-автоморфизм. По лемме А на с. 105 в [1] доказано, что для $B = A^\tau$ выполнено $L = AB$. Отсюда

$$L = L^\tau = AA^\tau = A^\tau A^{\tau^2} = AB = BC = AC,$$

где $C = A^{\tau^2}$.

Кроме того, вместо одного из факторов можно поставить либо A_9, либо $(3 \times U_4(2)) : 2$, либо одну из параболических подгрупп $P_i (i = 1, 3, 4)$ и получить новую тройную факторизацию.

Далее, $L = P\Omega_8^+(2) = AB = AC = BC$ для $A = Sp_6(2), B = (3 \times U_4(2)) : 2$, $C = A_9$. Кроме того, $L = AB = AC = BC$ для $A = P_i(i \in \{1, 3, 4\}), B = (3 \times U_4(2)) : 2$, $C = A_9$.

Как было отмечено ранее, всегда $P\Omega_8^+(q) = AB = AC = BC$ для $A \simeq B \simeq C \simeq P\Omega_7(q)$ для любого q. Вероятно, список можно расширить за счёт других максимальных подгрупп группы $P\Omega_8^+(q)$.

Имеется лишь одна спорадическая простая группа, обладающая тройными факторизациями. Это группа $L \simeq M_{12}$.

Группа L имеет подгруппу $A \simeq M_{11}$ и сопряжённую с A помощью внутреннего автоморфизма μ подгруппу B, для которой $G = AB$. А для подгрупп $C \simeq L_2(11)$ и $C \simeq 2 \times S_5$ имеется тройная факторизация с подгруппами A и B выше. Кроме того, имеется тройная факторизация с вышеупомянутыми A и B и подгруппой $C \simeq 4^2.D_{12}$. Имеются и такие тройные факторизации $A \simeq M_{11}, B \simeq M_{10} : 2, C \simeq L_2(11)$ и факторизация с заменой второго сомножителя на $B \simeq M_9.S_3$.

Знакопеременные группы A_n степени $n \geq 5$. Подход к решению для этого случая независимо от меня был обнаружен А. А. Гальтом (частное сообщение).

Если $n > 10$, то по теореме D из [1] получаем, что подгруппа A содержится в интранзитивной группе $A_k \lhd S_{n-k}$ при $k \leq 5$, а B – k-однородная группа. В частности, транзитивная. Тогда C будет также k_1-однородной, и по теореме D получаем противоречие. Аналогично, когда начинаем с k-однородной A. При $n = 6$ имеется случай, когда две подгруппы, скажем, A и B изоморфны A_5, а третья – нормализатор 3-силовской.

Полученные результаты позволяют упростить доказательство основной теоремы в [4].

Ссылки

[1] *M. W. Liebeck, C.E. Praeger and J. Saxl.* The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups // Memoirs of the American Mathematical Society. 1990. V. 86, № 432 . Providence, Rhode Island, USA. P.151.

[2] *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A.Wilson.* Atlas of Finite Groups. Oxford Univ. Press, 1985.

[3] *Казарин Л. С.* О тройных факторизациях конечных простых π-разрешимых групп // Тезисы докладов XV международной школы-конференции по теории групп, посвященной 95-летию со дня рождения М. И. Каргаполова. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2024. С. 45 – 46.

[4] *Казарин Л. С.* О произведениях π-разрешимых конечных групп // Труды ИММ УрО РАН. 2023. Т.29, №4. С. 109–120.

УДК 512.54

Л. С. Казарин
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
e-mail: lsk46@mail.ru.

Что вспомнилось

Воспоминания автора о годах, проведённых в Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова.

Библиография: 1 название.

Ключевые слова: Группа, соавторы. коллеги, кафедра.

1. Несколько слов о настоящем

История кафедры и факультета начинается для меня с 1972 г., когда я, недавно защитивший кандидатскую диссертацию (23 февраля 1972 г.) и проработавший в пермском НИИ управляющих машин и систем (НИИУМС) в качестве снс и завсектором около года, приехал в Ярославль в (вос)созданный Ярославский госуниверситет. Информацию получил из «Учительской газеты», где было объявление о вакансиях. Вначале написал Мирре Александровне Доброхотовой, исполнявшей обязанности заведующей кафедрой математики, получил ответное письмо, где сообщалось о новом заведующем кафедрой (уже теоретической кибернетики) А. Ю. Левине, защитившем недавно докторскую диссертацию. В марте 1972 г. я съездил в Ярославль и после небольшой беседы с Анатолием Юрьевичем Левиным и Львом Владимировичем Сретенским получил согласие на работу в качестве старшего преподавателя кафедры кибернетики. Мой переезд из Перми состоялся 27 августа 1972 г.

К этому времени относится и начало моих дружеских отношений с Л. Л. Кругликовым, приехавшим тогда же в Ярославль (впоследствии Лев Леонидович стал видным юристом и сыграл важную роль в развитии университета). Мы нашли общий язык на платформе шахмат. Оказалось, что мы оба приехали с Урала и наши биографии в какой-то момент оказались близки. У нас позднее появились общие друзья-юристы. Среди них отмечу Владлена Валентиновича Зенина, оказавшего заметное влияние на жизнь Льва Леонидовича. Наши биографии были в чём-то схожи, несмотря на разницу в возрасте. В 1986 г. мы оба защитили докторские диссертации (он в Москве, а я в Ленинграде). Далее оба стали заведующими кафедрами (с небольшими перерывами на административную деятельность).

Работа преподавателем была мне в новинку, опыта никакого (я был прикладным математиком и даже ассистентом не работал). Меня в качестве дополнительной общественной нагрузки сразу отправили в школу № 33 (над ней факультет долгие годы имел шефство), где я встретился с будущими нашими студентами. Этот поток был очень сильным. Многие сейчас занимают ведущие позиции в различных организациях Ярославля. Читал лекции по высшей математике и теории вероятностей на экономическом факультете и по программированию у физиков.

Кафедра теоретической кибернетики была очень интересной. Левин был безусловным лидером и очень нетривиальным человеком, обладавшим несомненным обаянием. На семинаре разбирались новинки в области прикладной математики, комбинаторные алгоритмы. Сам Левин вёл тему «Эвристические алгоритмы оптимизации». Среди участников семинара выделялись В. С. Рублев, Г. Д. Степанов, В. В. Майоров, Е. А. Тимофеев и Г. Н. Копылов. С последним мы подружились. В то время имелся хоздоговор с ПТНИИ, позволявший немного укрепить финансовое положение. Мы решали известную задачу о станках и деталях (часть теории расписаний). Впоследствии некоторые находки в этой области получили развитие в наших работах с пермским НИИУМС, выполненных кафедрой алгебры уже под руководством Ю. А. Брудного.

К началу моего приезда в Ярославль ядро факультета составляли математики, приехавшие из Воронежа, ученики М. А. Красносельского: Ю. С. Колесов, А. Ю Левин, В. Ш. Бурд, П. П. Забрейко, В. С. Климов, В. А. Бондаренко. Первым деканом физико-математического факультета с 1970 г. по 1973 г. стал профессор Петр Петрович Забрейко. Владимир Федорович Чаплыгин, ученик Ю. С. Колесова, стал деканом физико-математического факультета с 1973 по 1976 г. и деканом математического факультета с 1976 по 1986 г.

Факультет начал быстро развиваться. Приехали новые преподаватели: А. В. и Л. А. Зафиевские, В. Н. Матвеев, Ю. А. Брудный, В. Л. Дольников, В. К. Шалашов, Н. А. Стрелков, А. В. Угланов, В. А. Краснов, Г. М. Бродский (четверо последних – выпускники мехмата МГУ). На факультете были приняты на работу известные московские математики А. В. Чернавский, И. М. Яглом, В. А. Ефремович, А. Л. Онищик. Основные кафедры математического факультета были следующие: кафедра математического анализа (заведующий П. П. Забрейко), кафедра дифференциальных уравнений (заведующий Ю. С. Колесов), кафедра теоретической кибернетики (заведующий А. Ю. Левин). Создана была также кафедра общей математики, заведующим которой стал В. Ф. Чаплыгин. В 1976 г. появилась и кафедра алгебры и теории функций, заведующим которой стал приехавший из Днепропетровска со своими учениками Ю. А. Брудный.

Как бывшего алгебраиста, меня взяли на кафедру алгебры и теории функций. Юрий Абрамович Брудный сыграл выдающуюся роль в становлении новой кафедры, став лидером команды математиков, объединенных общими интересами. Главным алгебраистом стал Аркадий Львович Онищик. Он организовал алгебраический семинар, втянув в работу Ю. А. Белова, В. Г. Дурнева, Г. М. Бродского и меня. Изучались группы и алгебры Ли, делались доклады по своим работам. Приезжали математики из других городов и стран. В частности, гостем был киевский математик Л. А. Калужнин, приезжавший со своими учениками

В. А. Устименко и В. И. Сущанским. Приезжали математики из г. Пуатье (Франция) и из Германии. Благодаря Аркадию Львовичу появился периодический межвузовский сборник «Вопросы теории групп и гомологической алгебры», явившийся важным подспорьем в воспитании наших учеников и математиков близких направлений. Аналогично, под редакцией Ю. А. Брудного издавался межвузовский сборник «Исследования по теории функций многих вещественных переменных». Кроме того, работал общекафедральный семинар, на котором мы впервые познакомились с вейвлетами.

До разделения в 1987 г. кафедры алгебры и теории функций на кафедру алгебры и матлогики и кафедру теории функций можно считать, что выпускники этой суперкафедры принадлежат обеим кафедрам. Назову некоторых из таковых успешных выпускников[1].

Это ученики Ю. А. Брудного: Владимир Леонидович Дольников, ныне доктор физ.-мат. наук, профессор МФТИ, Ирина Павловна Иродова, ныне доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей математики ЯрГУ, Михаил Викторович Невский, ныне доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического анализа ЯрГУ, Павел Анатольевич Шварцман, ныне профессор университета Технион, г. Хайфа (Израиль).

Среди ярославских учеников А. Л. Онищика: Ольга Владимировна Платонова (1995 г.), работавшая в ЯГТУ, Вера Александровна Бунегина (1988 г.), работает в Московской академии предпринимательства при Правительстве Москвы, Анатолий Александрович Серов (1988 г.), работает в Тверском государственном университете, Александр Юрьевич Брудный (1986 г.), ныне профессор, работает в Канаде, Михаил Анатольевич Башкин (2004 г.), работал доцентом на кафедре алгебры и математической логики ЯрГУ, ныне заведующий кафедрой математики в Рыбинском государственном техническом университете, Андрей Вадимович Сударкин (2008 г.), работает в Управлении Северной железной дороги.

Среди ярославских учеников В. Л. Дольникова – Ольга Павловна Якимова (2001 г.), работает доцентом кафедры компьютерной безопасности ЯрГУ, и Надежда Евгеньевна Тимофеева (2010 г.), работает в Египте.

Среди учеников Л. С. Казарина – Валентин Николаевич Тютянов (1989 г.). Он защитил докторскую диссертацию и работает профессором в Гомельском филиале международного университета МИТСО (Белоруссия). Тематика исследовательской работы та же, что и в Ярославском университете – факторизации конечных групп.

Александр Иванович Бурцев (1992 г.) работает доцентом в РГТУ, г. Рыбинск. Его научная деятельность связана с влиянием на строение конечной группы условий, наложенных на классы сопряженных элементов (экстремальные задачи теории групп). Одна из его красивых теорем, касающихся строения групп, у которых имеется неприводимый характер ровно с двумя значениями на элементах группы, недавно привлекла внимание ряда исследователей.

Ильдар Ахатьевич Сагиров (2001 г.) работает директором финансового управления Северного банка ОАО «Сбербанк России». Результаты, вошедшие в его

[1]Далее Л. С. Казарин указывает также и аспирантов; год в скобках иногда означает дату защиты кандидатской диссертации – *прим. отв. ред.*

кандидатскую диссертацию, получили широкую известность, вошли в монографию по теории характеров групп и цитируются по сей день.

Александр Андреевич Волочков (2006 г.) окончил магистратуру и аспирантуру в ЯрГУ. После защиты кандидатской диссертации работает в Пермском федеральном исследовательском университете, доцент. Он решил проблему, поставленную белорусским математиком В. С. Монаховым. Информация об этом попала в известный во всем алгебраическом мире сборник нерешенных задач «Коуровская тетрадь», издающийся Новосибирским университетом и переводящийся на английский язык (теперь задача находится уже в статусе решенных).

Работа над проблемой описания конечных групп с малыми кратностями неприводимых представлений в тензорных произведениях неприводимых представлений конечных групп, поставленную нобелевским лауреатом в области физики Е. Вигнером, была начата Л. С. Казариным вместе с Виталием Валерьевичем Янишевским (2008 г.). Сейчас Виталий работает в Центре управления полётами, г. Королёв. Трудный случай, не поддававшийся решению «с разбегу», был полностью изучен Л. С. Казариным вместе с Евгением Игоревичем Чанковым (2010 г.). Он работал старшим инженером в ООО «Конфёрмит». Обобщение получено в работе Сергея Владимировича Полякова (2014 г.), работавшего ассистентом на кафедре общей математики ЯрГУ.

В Якутии работает выпускница аспирантуры кафедры алгебры и матлогики Саргылана Семёновна Поисеева.

Список выпускников кафедры, добившихся хороших результатов, можно продолжить. К числу выпускников кафедры алгебры и теории функций относятся супруги Михаил и Ольга Левины, хорошо известные в Ярославле благодаря своему дуэту «Вариант». Ольга Германовна (в девичестве Селевко) была дипломницей Л. С. Казарина, а Михаил Левин – дипломником Ю. А. Брудного. Ольга стала кандидатом педагогических наук.

Защитили диссертации за границей наши выпускники Сергей Игонин и Александр Гетманенко. Александр сейчас работает в Колумбии, г. Богота, Сергей Игонин работает в ЯрГУ.

Некоторые из бывших студентов стали предпринимателями. Например, Екатерина Львовна Казарина закончила магистратуру, является генеральным директором ООО «Дифайн» с 2006 г. ООО «Дифайн»– официальный партнёр компании «Тензор» по продажам и сопровождению бухгалтерской программы «СБиС++» и «СБиС++ электронная отчётность».

Кстати, большое число наших выпускников обосновалось в компании «Тензор». Руководитель отдела сопровождения информационных систем Ирина Александровна Семёнова (в студенческие годы Солодухо) – одна из тех, кто в 1998 г. начал формировать понятие «Тензор» в современном смысле слова. Как написано в официальном справочнике компании, она – неформальный лидер. К её авторитетному мнению принято прислушиваться. Самый дорогой «сопровожденец» СБиС++ – есть клиенты, которые не смогли отказать себе в этом удовольствии. Последовательница философии активного отдыха: в её отделе всегда есть место праздникам и внеофисным мероприятиям.

Не все выпускники аспирантуры заканчивают защитой кандидатской диссертации, но опыт показывает, что время, проведенное в аспирантуре, не является потерянным. К числу бывших аспирантов относится и Сергей Вячеславович Артамонов, работающий в ЯрГУ начальником управления материально-технического развития и государственных закупок. По нашему общему впечатлению, большинство выпускников кафедры алгебры и математической логики нашли себя в жизни и занимают вполне солидные позиции.

Я перечислил более 20 фамилий. Думаю, что успешных выпускников у нас намного больше.

Замечу, что на факультете значительное внимание уделялось студенческой науке. В числе первых участников студенческих научных конференций были С. А Кащенко и Е. П. Кубышкин, ставшие впоследствии докторами наук.

Значительное число аспирантов было на кафедрах дифференциальных уравнений, алгебры и теории функций и математического анализа. Мои друзья Е. А. Тимофеев и Г. Н. Копылов стали аспирантами А. Ю. Левина и впоследствии защитили кандидатские диссертации (Е. А.Тимофеев позднее защитил докторскую диссертацию). Одним из первых аспирантов факультета стал А. В. Зафиевский, впоследствии ставший деканом факультета ИВТ.

История создания факультета информатики и вычислительной техники (ИВТ) – довольно загадочная и таинственная. Факультет был создан под влиянием ряда академиков Академии наук СССР с основной целью создать в Ярославле научную базу, которая бы занималась разработкой суперкомпьютеров (академики В. А. Мельников и В. П. Иванников). Были организованы Институт микроэлектроники (ИМАН) и Институт проблем вычислительной техники (ИПВТ), предложена организация факультета информатики и вычислительной техники (ИВТ). Главным организатором этой деятельности был назначен появившийся в ЯрГУ в 1973 г. Юрий Александрович Маматов. Он родился в Тамбове в 1948 г., окончил факультет автоматизированных систем управления Рязанского радиотехнического института по специальности «Электронные вычислительные машины», затем аспирантуру на кафедре автоматики и телемеханики этого же института. С 1973 г. работал в Ярославском государственном университете на кафедре теоретической кибернетики, пройдя путь от старшего преподавателя до заведующего кафедрой исследования операций и вычислительных систем (с 1981 г.) и первого проректора университета (с 1986 г.). В 1975 г. он защитил докторскую диссертацию по закрытой тематике (степень доктора технических наук), а в 1985 г. стал доктором физ.-мат. наук. Должен заметить, что с приходом Ю. А. Маматова в хоздоговорную деятельность были втянуты почти все сотрудники факультета, за исключением кафедры алгебры и теории функций.

Факультет (и университет) пережил несколько болезненных трансформаций. В начале 80-х уехал в Минск профессор П. П. Забрейко, «ушли» в 1983 г. в результате каких-то склок ректора Л. В. Сретенского. Был избран ректором доктор химических наук Г. С. Миронов. Он проработал в качестве ректора до 2005 г. Начались компании против диссидентов, и были уволены И. М. Яглом и В. А. Ефремович. Уехал в Москву В. А. Чернавский. Факультет открыл новую часть биографии.

Не без некоторого сопротивления со стороны основателей математического факультета факультет ИВТ был все же создан. Я в это время был занят научной работой (был переведен по инициативе Ю. А. Брудного и П. П. Забрейко на должность снс для подготовки докторской диссертации), и происшедший разлом факультета на две части был для меня неожиданностью. Кафедры поделились практически пополам. В 1987 г. кафедра алгебры и теории функций разделилась на кафедру алгебры и матлогики и кафедру теории функций. Наиболее молодые и мобильные, люди, обладавшие организаторскими способностями, оказались на ИВТ. Более консервативные (имевшие солидный задел в науке) остались на математическом факультете. К этому времени я защитил докторскую диссертацию и из-за ухода из деканов В. Ф. Чаплыгина вынужден был взять на себя руководство факультета. Моим заместителем был Виктор Константинович Шалашов. Деканом факультета ИВТ стал А. В. Зафиевский. В 1988 г. проректором ЯрГУ стал В. А. Соколов, а Ю. А. Маматов стал директором ИМАН и ИПВТ. Я же решил уйти из деканов в 1988 г., передав бразды правления В. Г. Дурневу.

Дальнейшая история сосуществования двух родственных факультетов не была простой. В 1989 г. обозначился развал СССР, и многие научные программы были свернуты. В 1992 г. уехал в Израиль мой главный союзник Ю. А. Брудный. С собой он взял своих учеников П. А. Шварцмана и Н. Я. Кругляка. В мае 1997 г. Ю. А. Маматов был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в декабре 1997 г. он добровольно ушел из жизни.

Как и ожидалось с самого начала, наиболее важные научные достижения были получены на факультете математики, имевшем большое количество известных в своей области математиков. В 1986 г. защитил докторскую диссертацию Л. С. Казарин, затем А. В. Угланов и В. А. Краснов, в 1989 г. – С. А. Кащенко, следом в 1991 г. – Е. П. Кубышкин, затем В. С. Климов. В 1992 г. – Н. А. Стрелков, А. Ю. Колесов. В 1995 г. докторскую диссертацию защитил Е. И. Бережной, в 1996 г. – В. Е. Балабаев, в 1997 г. – В. Г. Дурнев, а в 1998 г – В. Ф. Камбулов. В 2000 г. докторскую диссертацию защитил В. Л. Дольников. В 2009 г. докторскую диссертацию защитил С. Д. Глызин, в 2011 г. – И. П. Иродова. В 2015 г. доктором стал М. В. Невский, в 2016 г.– Н. В. Тимофеева, а 2018 г. – А. Н. Куликов и И. С. Кащенко. В 2021 г. доктором стал декан факультета П. Н. Нестеров. Отмечу, что в 1996 г. диссертацию на соискание ученой степени доктора педагогических наук защитила В. А. Кузнецова, что благотворно сказалось на работе кафедры общей математики, возглавлявшейся Валентиной Анатольевной с 1987 г.

Преподаватели, связавшие свою жизнь с ИВТ, также добились успехов. В 1993 г. защитил докторскую диссертацию В. А. Бондаренко, в 1995 г. докторскую диссертацию защитил В. В. Майоров, а в 1996 г. защитился Е. А. Тимофеев. В 1999 г. при активном участии В. А. Соколова (он защитил докторскую диссертацию в 2006 г.) появился собственный журнал «Моделирование и анализ информационных систем», в котором работники математического факультета и факультета ИВТ могут печатать свои работы. В 2010 г. докторскую диссертацию защитил Е. В. Кузьмин, а в 2014 г. – В. А. Башкин.

На кафедре теоретической кибернетики работал семинар под руководством А. Ю. Левина, участниками которого были Г. Д. Степанов, В. С. Рублёв, Е. А. Тимофеев, Г. Н. Копылов, В. В. Майоров и я, тема – «Эвристические алгоритмы оптимизации». Кроме того, разрабатывалась хоздоговорная тема оптимизации работы участка производства (задача расписания), финансировавшаяся ПТНИИ. Мне удалось написать две научные работы по прикладной тематике, и я послал 4 тезиса на алгебраическую конференцию в Гомеле. К сожалению, все они остались не опубликованными. Но приглашение на конференцию я всё же получил. Это событие явилось источником кризиса, из которого выходом стало кардинальное изменение тематики работы. Осенью 1975 г. я поехал на повышение квалификации в МГУ. К тому времени у меня появилась вторая дочь Катя, которую мы на полгода перевезли к родителям в Пермь, ибо сам я должен был посещать занятия в МГУ. Мехмат пермского университета проявил серьёзную заинтересованность в моём возвращении в Пермь. Но наш ректор Л. В. Сретенский был против. В связи с расширением семьи мне была предоставлена трёхкомнатная квартира на Архангельском проезде в Ярославле. Пермь не реализовалась.

Длительное время в университете существовал совет по защитам докторских диссертаций в области алгебры и кибернетики. Это обстоятельство и упомянутый ранее научный журнал позволяли находить общие темы с сотрудниками ИВТ для научных дискуссий. Замечу, что в указанном диссертационном совете защищали диссертации учёные из Ивановского университета и Ярославского государственного педагогического университета.

Математический факультет и факультет ИВТ в каком-то смысле дополняют друг друга. Один из факультетов ближе к академической науке, второй ближе к приложениям.

В 2000 г. на математическом факультете ЯрГУ была открыта подготовка по специальности 075200 "Компьютерная безопасность". Идея открытия специальности принадлежала А. И. Русакову и была поддержана ректором ЯрГУ Г. С. Мироновым. Предварительно, за два года до открытия специальности, мы с деканом факультета Валерием Георгиевичем Дурневым прошли обучение на курсах повышения квалификации преподавателей "Криптографического цикла дисциплин организованных в Москве УМО по образованию в области информационной безопасности. При поддержке В. Д. Шадрикова и мехмата МГУ открытие специальности состоялось и решительным образом повлияло на дальнейшую историю факультета. Учитывая достаточное количество мест для работы будущих специалистов в области защиты информации, появившихся в последние годы, открытие новой специальности оказалось совершенно правильным решением.

Между тем, произошли изменения в жизни факультета, связанные со сменой поколений. Уехал и ушел из жизни А. В. Угланов, ушли из жизни Ю. С. Колесов, А. Л. Онищик, В. Ф. Чаплыгин, Н. А. Стрелков, покинула кафедру общей математики В. А. Кузнецова, ушел на пенсию В. А. Краснов, перешел работать в МФТИ В. Л. Дольников. После В. Г. Дурнева недолгий срок (2009 г.) деканом был Е. И. Бережной. С 2010 по 2015 г. деканом работал М. В. Невский. С 2015 г. по настоящее время деканом является ученик В. Ш. Бурда Павел Николаевич Нестеров. Некоторые важные сдвиги в руководстве факультета тоже произошли. Защитили докторские диссертации М. В. Невский, А. Н. Куликов, Н. В. Тимофеева, И. С. Кащенко. Очень важную нишу в образовании специалистов в области защиты информации занял Д. М. Мурин, ставший заведующим кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации.

В 2017 г. был организован Центр интегрируемых систем, Региональный научно-образовательный математический центр в г. Ярославле. Он является подразделением ЯрГУ. Этот центр основан в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1.10160.2017/НМ. Руководителем Центра является профессор Сергей Александрович Кащенко, а его заместителем – декан математического факультета Павел Николаевич Нестеров.

2. Как текла былая наша жизнь, что былой не была

Воспоминания имеют существенный недостаток, состоящий в пробелах памяти, не удерживающей большинство важных событий. Апостериори многое оказывается не совсем с тем знаком, который получился при их появлении. Чаще знаки расставляются случайно. К тому же, цифровая фотография появилась много позднее, чем была её актуальная надобность. Приходится мыслить фрагментами.

Жизнь университета начиналась с главного корпуса на Советской. Здесь проходили важнейшие события и даже научные конференции. Математики обсуждали планы издания и перевода зарубежной научной литературы. Обычно вёл такие собрания П. П. Забрейко, участвовали также В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, А. Ю. Левин. Кстати, моё зачисление на кафедру теоретической кибернетики произошло с доклада о своих научных результатах (по большей части я рассказывал о работе в НИИУМС в Перми). Анатолий Юрьевич Левин интересовался моими знаниями сложности вычислений. В частности, сколько арифметических операций требуется для нахождения произведения матриц. Мои ответы Левина устроили. Так что «вступительный экзамен» я сдал. Позднее, в аналогичной ситуации с Ю. А. Матовым экзамена не было.

Больше всего я побаивался одной серьёзной дамы, присутствовавшей на экзамене. Потом оказалось, что это – Нина Васильевна Рысина, лаборант кафедры (возможно, так называлась её должность). Нина Васильевна играла важную роль в жизни факультета, являясь неформальным организатором преподавательского коллектива. С ней можно было советоваться по самым различным вопросам, в том числе и бытовым. Она обладала острым языком, комментировала все события нашей жизни. Надо было записывать её высказывания, но память моя большую часть не сохранила. Вот малюсенький пример. Что-то грандиозное было придумано в руководстве СССР. Комментарий Н. В. Рысиной:

Мы вступаем в новый график:
Дом, семья и дети на фиг!

Когда факультет переехал на улицу Андропова (второй корпус), в перерывах между занятиями и после занятий организовывались шахматные баталии. В них в качестве игроков или болельщиков принимало участие большинство мужчин факультета. Главным чемпионом был Г. Н. Копылов, кандидат в мастера спорта по шахматам.

Л. С. Казарин и Н. В. Рысина

В первом корпусе были большие теннисные столы, и можно было участвовать в соревнованиях по пинг-понгу. На факультете главными теннисистами были В. С. Рублёв и Г. Д. Степанов. С появлением спортивного лагеря на Улейме занятия теннисом стали там постоянными, а столы из первого корпуса исчезли. Позднее спортивные энтузиасты факультета (В. А. Бондаренко, Ю. А. Белов, Н. А. Стрелков, я и другие) облюбовали спортивный зал одной из школ для занятий баскетболом.

Важными событиями в жизни факультета были дни факультета, отмечавшиеся 1 апреля. Они состояли из двух частей. Первая часть – пресс-конференция, когда преподаватели во главе с деканом отвечали на вопросы студентов из зала (иногда устно, иногда в записках). Например, меня спрашивали: *Танцуете ли Вы брейк-данс?* Мой ответ:

Я раз в году танцую данс.
Соседей это вводит в транс.

Другой вопрос: *Что Вы будете делать, если вдруг исчезнут из продажи конфеты? Сможете ли Вы награждать студентов за решение задачи?* Мой ответ:

Когда б не стало вдруг конфет,
Я сел бы на велосипед
И стал искать по белу свету
Хоть завалящую конфету!

Могу поручиться, что все преподаватели держались достойно и награждались заслуженным смехом и аплодисментами. Не запоминал происходящее, ибо был участником шоу. Тем не менее, надеюсь, что у Натальи Львовны Майоровой коечто сохранилось.

Отмечу, что весь день 1 апреля был отдан на управление студентам. Был студенческий декан, распоряжавшийся процессом и управлением факультета. Проходили шуточные конкурсы, торговля сувенирами. Один из непосредственных организаторов, задававшим основную тему дня, был Владимир Григорьевич Фокин, имевший какие-то связи со студенческим театром миниатюр.

Были разные хохмы. Например, для одного из дней, когда участвовала команда преподавателей, у каждого на спине была надпись с упоминанием его роли.

Так вот выяснилось с выходом на сцену, что надпись у одного из преподавателей гласила: *Преподдаватель.* Доля истины по отношению к данной личности, несомненно, была. Зал, прочитав, покатился со смеху. В описываемый промежуток времени студенческим деканом был Александр Лерман. Моя ода этому декану:

О, Лерман, молодой декан,
Тебе я оду посвящаю
И молока большой стакан
В твою я славу выпиваю.

Затем, по образцу получивших распространение телевизионных, проходили КВН. Сражались команды преподавателей и студентов, «непрерывщиков» и «дискретчиков», факультетов математики и ИВТ. В одном из КВН я принимал участие в качестве капитана команды преподавателей. Моим оппонентом был студент Александр Юрьевич Беляков. Сейчас он известный поэт, лауреат международного конкурса поэзии «Глагол» (1993) и сетевого конкурс русской литературы «Тенёта-Ринет'2002». Мы по заданию жюри должны были совместно сочинить стихотворение. Оно получилось таким:

Сегодня 1 апреля.
Вороны весело запели.
На крышах нашего двора
Звучат их арии с утра.
И так прекрасен дружный хор их
И всяких прочих тварей шорох,
Что хочется порою вторить
И плыть, и с буйным ветром спорить!

Судьбы студентов, окончивших факультет математики, самые разные. Мне приходилось повлиять на выбор профессии одним учеником весьма неожиданным образом. Летом я был руководителем практики у студентов-программистов. Иногда из-за неполадок с техникой приходилось ожидать исправления техники. Чтобы не тратить время попусту, я стал рассказывать рубаи Хайяма. Потом беседовали о жизни и смерти. А спустя 3 года мой студент стал священником. У него есть свой приход. Я с радостью с ним здороваюсь и говорю о жизни.

А тот КВН мы, преподаватели, проиграли. Вот комментарий проигравших.

С вечера до самого утра
Длится беспощадная игра.
Вот уж уступают мастера,
Ибо в зале сильная жара.
У студента радостный оскал.
Он умеет выбить нужный балл,
Потому, что сессию сдавал.
В этом деле – профессионал,
Потому, что лекций не читал,

А сидел или готовил зал,
Да к тому ж их главный балагур
Посещал театр миниатюр.
А ещё студенты нынче доки,
Так запрограммировал их Фокин!

К слову, Владимир Фокин – очень важный персонаж в истории факультета. Он обладал огромной энергией и был организатором большинства игр КВН. У него был острый язык, хорошие организаторские способности, умение найти подход к студентам. Главный недостаток – неумение собраться и изложить свои мысли на бумаге.

Летом многие преподаватели университета (до начала бурных событий 90-х годов) отдыхали на базе отдыха в Улейме, живописном месте недалеко от Большого Села, где также была расположена учебная база биологического факультета. Берег реки, пляж, спортивные сооружения. Непременный настольный теннис, лодки. Вечером частенько костёр, песни. Приезжали интересные личности с лекциями. В лесу грибы, ягоды, много черники и голубики. На болотах можно было собирать клюкву. Были и змеи, но серьёзных инцидентов не было. Было невероятное событие для отдыхающих, когда Вячеслав Владимирович Майоров поймал полутораметровую щуку. Она была пожарена, и каждому отдыхающему достался изрядный кусок.

Идиллическое время к началу 90-х закончилось. Появилась возможность приобрести так называемую дачу. Вместе с Л. Л. Кругликовым мы стали дачевладельцами в деревне Ратислово, недалеко от Семибратово. То есть получили в своё владение участок земли, на котором смастерили себе нехитрые жилища и стали заниматься огородно-садовыми делами.

В 1988 г. удалось организовать школу-конференцию по теории конечных групп (председатель оргкомитета – А. И. Кострикин). В работе школы приняли участие 56 математиков из 16 городов СССР, в том числе В. П. Шунков, Н. С. Черников, А. И. Старостин, Н. А. Вавилов, В. А. Белоногов, А. С. Кондратьев, А. В. Боровик, А. А. Иванов, В. Д. Мазуров, Э. М. Пальчик, С. В. Шпекторов, В. И. Устименко. В. И. Трофимов, являвшиеся лидерами в нашей науке. Мои близкие друзья на факультете Н. А. Стрелков и В. Л. Дольников в конференции не участвовали. Наши взаимоотношения были неровными. С Николаем Александровичем я поддерживал дружеские контакты до конца его жизни. С Владимиром Леонидовичем мы как-то расстались. Он стал важной персоной в организации школьных олимпиад и задачным композитором. В результате он переехал в Зеленоград, став профессором МФТИ.

В начале 90-х я обратил внимание на работы по теории характеров С. П. Стрункова и стал его оппонентом по докторской диссертации в 1992 г. Потом Сергей заинтересовал меня алгебраической конференцией в г. Голуэй (Ирландия). Конференция спонсировалась Дж. Соросом. Надо было найти коллег на Западе, которые бы рекомендовали нас для участия в конференции. Мы попросили поддержку у Я. Берковича из Израиля, О. Кегеля и Б. Амберга из Германии. Получили приглашения. Кстати, ранее Кегель неоднократно приглашал меня, но в тот момент мои попытки поехать были неудачными. Поездка в Ирландию состоялась в 1993 г.

Второй слева – Ефим Зельманов

Кстати, некоторые западные коллеги пытались принять резолюцию, осуждающую академика Игоря Ростиславовича Шафаревича. Однако Ефим Зельманов сказал, что Шафаревич – гений, на чём дискуссия и закончилась.

Мы с Сергеем подружились со многими коллегам. В частности, с профессорами Б. Амбергом, Франческо де Джованни и Д. Чиллагом. На шахматном турнире конференциии я занял второе место. Наши доклады были тепло встречены. После конференции, у Сергея дома, я познакомился с Владимиром Михайловичем Сидельниковым, академиком Академии криптографии и лауреатом государственной премии 1990 г., и эта дружба продолжалась до конца его жизни. Когда утверждался совет по защитам докторских диссертаций в Ярославле, участие в нём Стрункова и Сидельникова оказалось важным.

С С. П. Струнковым, 1995 г.

С В. М. Сидельниковым, 1995 г.

Знаковым событием было открытие на факультете специальности «Компьютерная безопасность» в 2000 г. Немаловажной явилась поддержка кафедры высшей алгебры МГУ. Следом появился диссертационный совет по защитам докторских диссертаций.

Чл.-корр. РАН А. И. Кострикин, проф. Б. Амберг (Майнц) и Л. С. Казарин

На защите диссертации. Оппонент проф. Виталий Баранский (Екатеринбург)

На защите выпускной работы на специальности КБ. 2008 г.

Выпускная фотография 2020 г.

70-е и 80-е гг. были временем активной научной работы. Проводилось множество научных конференций, в том числе в крупных научных центрах: в Москве, Петербурге, Екатеринбурге, Гомеле, Кишинёве и других городах. Напомню, что тогда существовал Советский Союз и поездка, например, в Гомель не была проблемой.

Санкт-Петербург, 2007 г. Участники из Екатеринбурга проф. В. И. Трофимов, проф. А. С. Кондратьев, чл.-корр. РАН проф. А. А. Махнёв и Л. С. Казарин

Гомель, 2005 г. Член-корр АН БССР Л. А. Шеметков

Гомель. Профессора Казарин, Амберг (Майнц), Го Вэн Бин (Китай)

Гомель, 2011 г. Профессора Леонид Курдаченко (Украина),
Лев Казарин (Ярославль), Николай Семко (Украина).

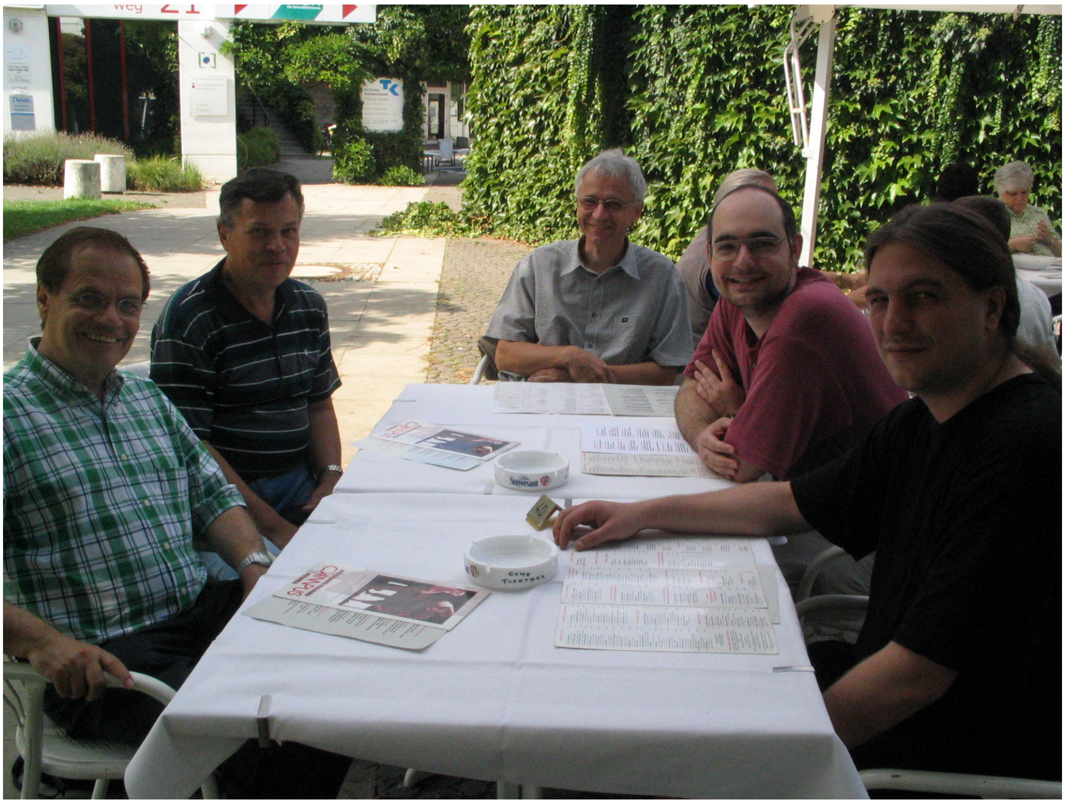
В начале XXI в. проводились областные конкурсы научных работ и студенческих работ. Некоторое представление о процедуре награждения даёт следующая фотография.

Награждение. С ректором А. И. Русаковым

Большую роль в становлении факультета сыграл Аркадий Львович Онищик. Значительная часть его работ была опубликована во время его работы в ЯрГУ, и многие ученики Аркадия Львовича начали свою научную работу в это время.

Аркадий Львович Онищик

Один из юбилейных вечеров на квартире А. Л. Онищика.
На фото: профессор А. С. Тихомиров, ученики А. Л.Онищика М. А.Башкин и А. В.Сударкин, Аркадий Львович, его жена и доцент С. А.Яблокова



3. Галопом по Европам и далее

С началом 90-х гг. появилась возможность ездить за рубеж. Для меня эта возможность открылась в 1993 г. с поездкой в Голуэй (Ирландия) на алгебраическую конференцию «Groups St. Andrews 1993». Кратко можно описать мои путешествия следующим образом.

1994–2016 г., Германия. Университет г. Майнца. В общей сложности я провёл в этом городе не менее 32 месяцев. Большей частью поездки финансировались грантами немецкого научного общества «DFG». Здесь я сделал доклад о своих работах по факторизациям групп. Присутствовали профессора Б. Хупперт, К. Дёрк, Б. Амберг и Ф. Лайнен. Кроме того, в заседании участвовали студенты и аспиранты. Впоследствии наше сотрудничество с Б. Амбергом было весьма плодотворным и поддержано «DFG».

Кроме того, были визиты на семинар Отто Кегеля во Фрайбурге, Доклады в университетах Эрлангена и Вюрцбурга. Участвовал в конференции «Группы и топологические группы» в знаменитом университете Эрлангена, прославившегося «Программой Клейна».

Провёл месяц в Математическом институте Обервольфаха вместе с С. П. Струнковым. По воскресеньям нас навещал О. Кегель, мы делали экскурсии в окрестностях Шварцвальда. Раз в неделю проводились международные математические конференции.

По приглашению университета г. Пуатье (Франция) провёл месяц в Пуатье. Каким-то образом благодаря этому позже принял участие в переводе книги П. Нодена и К. Китте «Алгебраическая алгоритмика».

По приглашению университета в Афинах (Греция) провёл неделю в Афинах, сделал доклад и написал совместную статью с профессором Панагиотисом Соулсом.

Неделю провёл в Белостоке (Польша), где участвовал в конференции «Математика для Мира» вместе с А. Л. Онищиком и В. Г. Дурневым.

В 2002 г. впервые посетил Китай. Конференция «Algebra and related topics», проводилась в течение двух недель как сателлитная конференция международной математической конференции. В ней участвовали математики из России, Белоруссии, Германии США, Ирана, Вьетнама и Китая.

В 2004 г. неожиданно умер видный немецкий математик и мой друг Клаус Дёрк. На похороны приехали многие ученики и коллеги Клауса. В их числе были молодые математики из Испании Ана Мартинес-Пастор и Мария Долорес Перец-Рамос. Мы много общались. Были задачи, интересовавшие обе группы исследователей. В результате в мае 2005 г. я поехал в течение двух недель в Валенсию (Испания) по приглашению Политехнического университета и классического университета. Мы выполнили большой цикл совместных исследований с 2005 по 2019 г.

С профессором М. Д. Перец-Рамос

С профессором А. Мартинес-Пастор

С этого времени я частенько посещал Валенсию. Один раз вместе с профессором А. С. Кондратьевым из Екатеринбурга посетили Барселону в качестве туристов. Последний раз я был в Валенсии в 2019 г. Однако совместная работа не прекращалась. Последняя работа опубликована в 2025 г.

Барселона

В 2008 г. участвовал в конференции по теории групп в Сючжоу (Китай). Моим попутчиком был профессор Б. Амберг. Из-за некоторых проблем с транспортом пришлось 3 дня пробыть в Шанхае.

2011 г. Исследовательский визит в течение трёх недель в Хефей, Институт науки и Технологий (Китай), прочитан цикл из 5 лекций. Вместе со мной была группа математиков из Санкт-Петербурга. Последняя фотография из Китая.

С Н. А. Вавиловым. 2011 г.

С Н. А. Вавиловым. 2011 г.

Китай, 2011 г.

В научном плане исследования по алгебре в Ярославском университете отражены в статье [1].

Ссылки

[1] *Казарин Л. С.* Исследования по алгебре в Ярославском университете // Математика в Ярославском университете: Сборник обзорных статей: К 45-летию математического факультета. Ярославль: ЯрГУ, 2021. С. 112–138.

УДК 51-73 + 534-141

Н. Ю. Колбнева
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

Аналитический расчет акустического излучения парогазового пузырька в жидкости

Описываются асимптотические расчеты осцилляций парогазового пузырька в идеальной диэлектрической жидкости. Получено и проанализировано дисперсионное уравнение для комплексной частоты осцилляций. Показано, что мощность звукового излучения от осциллирующих кавитационных пузырьков в воде на порядок величины ниже осциллирующих дождевых капель.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: линейные колебания, аналитический асимптотический расчет, идеальная сжимаемая жидкость, парогазовый пузырь, акустическое излучение.

Микропузырьки в жидкости играют важную роль в процессах акустической и гидродинамической кавитации, флотации, фильтрации, сонолюминисценции, барботажа, теплообмена. Впрочем, в работах [1, 2] показано, что колеблющиеся в воде воздушные пузырьки являются источниками акустического излучения.

Пусть сферический пузырь радиуса R, плотностью ρ_1 находится в безграничной идеальной сжимаемой диэлектрической жидкости, характеризующейся плотностью ρ_2 и коэффициентом поверхностного натяжения σ. Будем считать, что пузырь содержит совершенный газ и насыщенный пар окружающей жидкости.

Как известно, капиллярные колебания стенки пузыря разделяются на радиальные центрально-симметричные пульсации, приводящие к изменению его объема, и поверхностные осесимметричные осцилляции из-за теплового движения молекул жидкости в окрестности пузыря [2]. Однако для качественного рассмотрения задачи будем считать внутреннею среду пузыря несжимаемой.

Рассмотрение задачи проведем в сферической системе координат с началом в центре масс пузырька. Возмущенная поверхность пузырька в любой момент времени представляется в виде $r(\theta,t) = R + \xi(\theta,t)$, где $\xi(\theta,t)$ – малое волновое искажение сферической формы осцилляциями поверхностных мод. Поле скоростей движения внутренней и внешней сред пузыря $\vec{V}_j$ положим потенциальным с потенциалами ψ_j: $\vec{V}_j(r,\theta,t) = \nabla\psi_j(r,\theta,t)$ $(j = 1,\ 2)$, где индекс 1 относится к внутренней среде, индекс 2 – к внешней среде.

Волновое движение стенки пузыря создает возмущение давления внешней материальной среды, что приводит к акустическому излучению.

Математическая формулировка задачи о расчете спектра капиллярных осцилляций излучающего пузырька состоит из уравнения Лапласа и условия ограниченности в начале координат потенциала поля скоростей движения внутренней среды пузырька, волнового уравнения и условия излучения Зоммерфельда [3] для потенциала поля скоростей движения жидкости, кинематического и динамического условий, а также дополнительных условий сохранения объема пузырька и неподвижности его центра масс.

Решение задачи проведем в рамках теории возмущений [4, 5] в линейном приближении по малому параметру безразмерной амплитуды осцилляций $\varepsilon \equiv |\xi|/R << 1$. Искомые функции $\vec{V}_j$, ψ_j, $\xi(\theta,t)$ являются величинами первого порядка малости, а давление внутри пузыря – нулевого порядка малости. Гидродинамические давления внутри и вне пузыря и давление капиллярных сил представим в виде суперпозиции компонент нулевого порядка, определяющих равновесное состояние системы, и линейных поправок, связанных с деформацией равновесной поверхности пузыря теплового происхождения.

Подстановка асимптотических разложений в систему гидродинамических уравнений с граничными и дополнительными условиями позволяет разложить уравнения в ряд Тейлора в окрестности равновесной сферы. Собирая вместе слагаемые одного порядка малости, выделим краевые задачи в нулевом и первом приближениях по малому параметру.

В итоге из баланса давлений первого порядка малости выведено дисперсионное уравнение, связывающее комплексную частоту осцилляций ω_n с номером колебательной моды n:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho_1 R^3} n(n-1)(n+2)\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n H_0\right)^{-1};$$

$$H_0 \equiv \frac{h_n^{(2)}(kR)}{R\partial_r\left(h_n^{(2)}(kr)\right)|_{r=R}};$$

$$k = \frac{\mathrm{Re}\omega_n}{\upsilon};$$

k – волновое число, υ – скорость распространения звуковых волн в жидкости.

Используя асимптотическое разложение функции $H_0(kR)$ при $kR << 1$ в виде

$$H_0 \approx -\frac{1}{n+1} + i\left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\right)^2 (kR)^{2n+1},$$

выпишем комплексные решения дисперсионного уравнения:

$$(\mathrm{Re}\omega_n)^2 = \frac{\sigma}{\rho_1 R^3} n(n-1)(n+2)\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{n}{n+1}\right)^{-1};$$

$$\mathrm{Im}\omega_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\right)^2 \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2}\upsilon^{2n+1}\rho_1^{n+1}}\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(1 + \frac{n}{n+1}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-(n+2)} n^{n+2}((n-1)(n+2))^{n+1}.$$

Здесь вещественная часть $\mathrm{Re}\omega_n$ определяет собственную частоту поверхностных осцилляций пузыря, а мнимая часть $\mathrm{Im}\omega_n$ характеризует декремент затухания, связанный с энергопотерями на излучение акустических волн.

Использование общей формулы для интенсивности акустического излучения [3] и рассчитанного поля скоростей течения жидкости в волновой зоне акустического поля:

$$\vec{V}_2(r,\theta,t) = -\sum_{n=2}^{\infty} i^{n+2}\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}R^{n+2}k^{n+1}\frac{1}{r}\mathrm{Re}\omega_n M_n \exp\left(-i\left(\mathrm{Re}\omega_n t + kr\right)\right) P_n(\mu)\vec{e}_r,$$

позволяет прийти к аналитическому выражению для мощности акустического излучения одиночного осциллирующего пузыря в сжимаемой жидкости. Оно имеет вид

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\pi(n(n-1)(n+2))^{n+2}}{(2n+1)}\left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\right)^2\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+2)}\frac{\varepsilon^2\rho_2\sigma^{n+2}R^{n+4}}{\upsilon^{2n+1}\rho_1^{n+2}}.$$

Возможным источником акустического излучения являются устойчивые кавитационные пузырьки, возникающие при распаде каверны. Так, в процессе гидродинамической дегазации при заполнении кавитационной камеры водой наблюдается образование воздушных пузырьков размером от 1 мм до 3 мм. Используя средние характеристики внутренней и внешней сред пузырька, совершающего поверхностные осцилляции второй колебательной моды с безразмерной амплитудой $\varepsilon = 0.1$, получим интенсивность излучения от $\sim 5\cdot 10^{-19}$ эрг/с до $\sim 5\cdot 10^{-18}$ эрг/с в диапазоне звуковых частот от $0.12\cdot 10^3$ рад/с до $0.62\cdot 10^3$ рад/с. Обнаружено, что интенсивность звукового излучения осциллирующих кавитационных пузырьков в воде на порядок величины ниже по сравнению с осциллирующими крупными дождевыми каплями.

Ссылки

[1] *Чашечкин Ю. Д.* Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. №1 (94). С. 73–91.

[2] *Жаров А. Н., Григорьев А. И., Жарова И. Г.* Нелинейные капиллярные колебания заряженного пузырька в идеальной диэлектрической жидкости // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 10. С. 41–50.

[3] *Лепендин Л. Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.

[4] *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

[5] *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 311 с.

УДК 82.4+51.78

Е. В. Коновалов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: kinnarts@mail.ru

К биографии выдающихся математиков Марка Григорьевича и Селима Григорьевича Крейнов

Статья представляет собой генеалогическое исследование в отношении некоторых ранее неизвестных фактов биографии выдающихся советских математиков братьев Марка Григорьевича и Селима Григорьевича Крейнов. В научный оборот вводятся архивные документы, которые исправляют и уточняют обстоятельства рождения, а также происхождения названных людей, дальним родственником которых оказался автор статьи. Найденные документы могут быть использованы в дальнейшем при написании полноценных биографий этих двух математиков или книг мемуарного характера.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: математика, генеалогия, архивы, математическая генеалогия, мемуары, метрические книги, метрические записи.

Настоящая статья посвящена двум замечательным советским математикам еврейского происхождения. Марк Григорьевич Крейн — один из крупнейших математиков XX века. Впечатляет самый перечень тех областей, которыми он занимался. Приблизительно триста его опубликованных работ (в том числе восемь монографий) относятся к различным разделам алгебры, математическому анализу, теории функций, функциональному анализу, теории интегральных и дифференциальных уравнений, математической физике и аналитической механике [1]. Достижения М. Г. Крейна в каждой из этих областей оказали существенное влияние на их развитие; что же касается функционального анализа, то полученные им результаты в значительной степени определили современный облик этой ветви математики. Марк Григорьевич Крейн — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент академии наук УССР, лауреат государственной премии УССР в области науки и техники (1987), почётный член американской академии искусств и наук (1970), лауреат престижной международной премии Вольфа (1982).

Примечательно, что М. Г. Крейн так и не стал академиком АН СССР. Сначала на признание его результатов повлияла борьба с «безродными космополитами».

Кроме того, всю свою жизнь он оставался беспартийным. Не демонстрировал он и других знаков лояльности по отношению к разного рода начальству, далёкому от математики. По воспоминаниям коллег и друзей Марк Григорьевич был прекрасным педагогом, отзывчивым человеком, откровенным в суждениях, подчас нелицеприятных [2]. Шесть раз московское математическое общество и математический факультет МГУ выдвигали кандидатуру М. Г. Крейна на соискание Ленинской премии, но его фамилия неизменно исчезала из списков. Всю жизнь учёный, получавший многочисленные приглашения на международные конференции и симпозиумы, был невыездным. Почти вся его жизнь прошла в Одессе, там он и умер в 1989 году.

Марк Григорьевич Крейн

Работы М. Г. Крейна выходили даже после его смерти. В 1993–1997 годах в Киеве было издано трёхтомное собрание его основных трудов [3]. Большое внимание Марк Григорьевич уделял и воспитанию учеников. За свою жизнь он подготовил сорок девять кандидатов и докторов физико-математических и технических наук, среди которых такие учёные как И. Ц. Гохберг и М. А. Красносельский. Среди учеников последнего — В. А. Бондаренко, В. Ш. Бурд, П. П. Забрейко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Левин, В. С. Рублёв. Можно сказать, что влияние М. Г. Крейна, хотя и опосредованное, ощутили на себе почти все (если не все без исключения) преподаватели математического факультета и факультета ИВТ ЯрГУ с учёной степенью кандидата или доктора физико-математических наук [4].

Любопытно и то, как Марк Григорьевич пришёл к математике. В 1921 году М. Г. Крейн окончил трудовую школу и начал посещать вечерние лекции Б. Н. Делоне по аналитической геометрии в Киевском университете. Тогда же в качестве вольнослушателя он принимал участие в различных семинарах академика Д. А. Граве. В 1922 году (в четырнадцать лет) Марк Григорьевич стал сотрудником лаборатории экспериментальных исследований по вопросам натуральной философии, входившей в состав физико-математического отделения ВУАН. В этой лаборатории работал и другой известный впоследствии математик Николай Григорьевич Чеботарёв, сыгравший вскоре огромную роль в судьбе талантливого юноши. Дело в том, что жизненные планы Марка Григорьевича поменялись. Считая необходимым начать самостоятельную трудовую жизнь, весной 1924 года он без согласия родителей уехал в Одессу.

Летом того же года на пляже Аркадия можно было увидеть, как некий молодой человек делал стойку на руках и в таком положении заходил в воду. Одним из свидетелей этого случайно оказался профессор Чеботарёв, который узнал в акробате парня из киевского семинара Граве. Марк приехал в Одессу, чтобы стать акробатом в цирке, но место оказалось занято, и он планировал начать карьеру моряка. Чеботарёв предложил другой вариант: пойти к нему в аспиранты, причём без диплома о высшем образовании. Через пять лет М. Г. Крейн стал доцентом, а в дальнейшем — профессором и заведующим кафедрой в Одесском университете. Уже в 1938 году учёный совет МГУ присудил М. Г. Крейну степень доктора наук (без защиты диссертации), а год спустя академия наук УССР избрала его членом-корреспондентом.

Выдающимся математиком был и младший брат Марка Григорьевича — Селим Григорьевич (Гершкович) Крейн (1917–1999), доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РСФСР (1989), лауреат государственной премии Украины в области науки и техники (1998). Основные его труды (среди которых девятнадцать монографий) относятся к функциональному анализу, теории вязкой жидкости, уравнениям в частных производных. Большой вклад С. Г. Крейн внёс в разработку теории интерполяции линейных операторов [5], фактически основав это направление функционального анализа.

В 1940 году Селим Григорьевич окончил физико-математический факультет Киевского университета, а затем аспирантуру под руководством академика Н. Н. Боголюбова. В годы войны С. Г. Крейн под руководством академика М. А. Лаврентьева работал над математическими проблемами теории куммулятивных снарядов и в 1950 году в Академии артиллерийских наук защитил диссертацию на соискание степени доктора технических наук. Сказано там кое-что и о Марке Григорьевиче Крейне. Например, особо отмечен тот факт, что оба выдающихся математика сталкивались с серьёзным административным противодействием и вынуждены были подолгу работать в технических ВУЗах, уровень которых не соответствовал их собственному научному и педогогическому потенциалу.

Селим Григорьевич Крейн

В 1953 году Селим Григорьевич вынужден был уехать из Украины и оказался в Воронежском государственном лесотехническом университете, с которым связал всю свою профессиональную жизнь. На сайте этого университета размещены воспоминания Татьяны Селимовны Крейн-Ворониной, дочери Селима Григорьевича [7], которые дают представление об этом незаурядном человеке. За годы своей работы С. Г. Крейн подготовил более восьмидесяти кандидатов наук. По меньшей мере двадцать два его ученика стали докторами наук. Принято считать С. Г. Крейна одним из создателей Воронежской школы функционального анализа. В этом качестве Селим Григорьевич, думается, тоже оказал заметное влияние на тех математиков, которые со временем переехали из Воронежа в Ярославль, а затем основали математический факультет нашего университета. Таким образом, оба героя настоящей статьи повлияли на развитие математики в ЯрГУ. При этом, насколько мне известно, М. Г. Крейн ни разу не бывал в Ярославле. Что касается Селима Григорьевича, то, судя по воспоминаниям его учеников и коллег, в 1977 году он прочитал цикл лекций по теории интерполяции операторов на ярославской школе «Операторы в функциональных пространствах». Должно быть, это происходило в нашем городе.

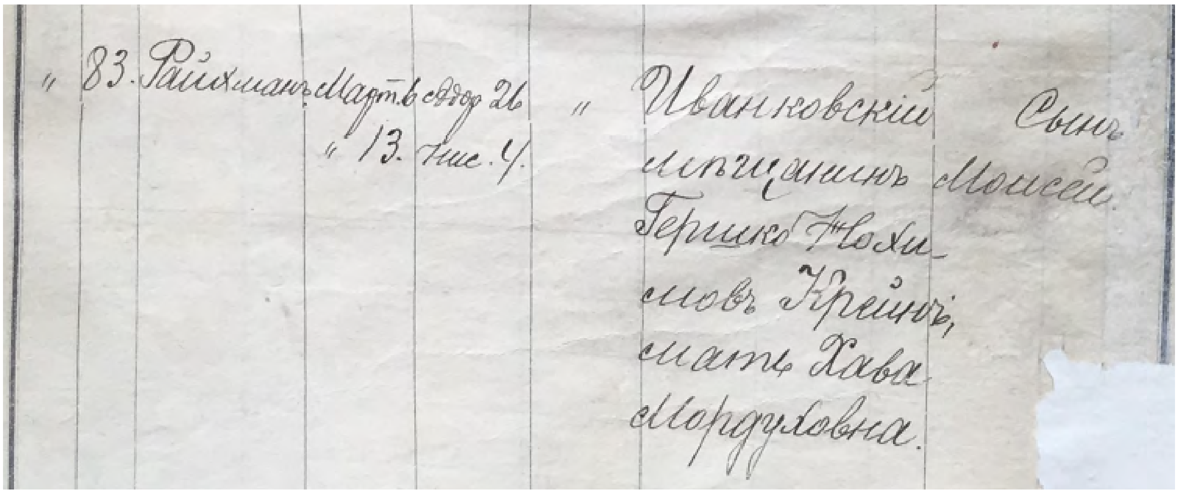
Отдав должное замечательным учёным, теперь я должен сказать несколько слов, которые объяснили бы мой интерес к их жизни и биографии. Мой отец — профессор, доктор химических наук Владислав Шуньевич Фельдблюм (1935–2023). Долгие годы он работал в НИИМСК, а затем в Ярославском техническом университете, который сам же когда-то закончил. Родился он в Чернигове в семье кадрового офицера Шуни (Шулима) Либеровича Фельдблюма (1907–1990). Ещё до войны вся семья перебралась в Ярославль. Хотя интересы моего отца были далеки от математики, но одна из его заметок оказалась посвящена Марку Григорьевичу Крейну. Завершалась она так: «К моему стыду и большому сожалению, я никогда не видел своего именитого родственника. Мне рассказывал о нём отец: они были одногодки, двоюродные братья и большие друзья».

Заинтригованный возможным родством с двумя выдающимися математиками, я решил досконально разобраться в этом вопросе. В результате удалось обнаружить архивные документы, которые проливают свет на обстоятельства жизни родителей С. Г. и М. Г. Крейнов в начале XX века. Оба математика родились в многодетной семье лесного инженера Герша Нухимовича (Григория Наумовича) Крейна. Он, в свою очередь, происходил из семьи Нухима Ицковича Крейна, который занимался сплавом и торговлей лесом в городке Иванков Радомысленского уезда Киевской губернии. Кстати, в том же уезде находилось и местечко Хабно, где ещё до революции родился мой дед Шуня Либерович Фельдблюм. Именно там по материалам Всероссийской переписи населения 1897 года жила семья его отца, Либера Мордуховича Фельдблюма (1877 – после 1926). У последнего была сестра Хавва Мордуховна, которая по данным метрических книг синагоги в Хабно родилась 16 ноября 1879 года. Она была младшей из семи детей моего прапрадеда Мордуха Боруховича Фельдблюма (1849 – между 1879 и 1897) и его жены Рахили Шулимовны, урождённой Офингенден (1847 – после 1897). Однако установить какую-либо родственную связь моих предков с семьёй Нухима Ицковича Крейна не удалось.

В открытых источниках указано, что матерью С. Г. и М. Г. Крейнов была Ева Марковна Крейн. Ни её имя, ни отчество, ни год рождения (1883) не намекали на какое-то отношение к семье моего прадеда Либера Мордуховича Фельдблюма. Найти концы мне помогло следующее обстоятельство. После революции многие евреи переделывали свои традиционные имена в близкие по звучанию русские — отчасти в рамках ассимиляции, отчасти ради удобства. Именно так Марк Гершкович Крейн превратился в Марка Григорьевича, а Селима Гершковича тоже, вероятно, чаще называли Селимом Григорьевичем. Несколько поразмыслив, я предположил, что сестра моего прадеда Хавва Мордуховна Фельдблюм и Ева Марковна Крейн — один и тот же человек.

Это довольно сильное допущение удалось подтвердить с помощью архивных сведений. Разумеется, всё прояснила бы запись в метрической книге о бракосочетаниях киевской синагоги за 1902 год, поскольку в той же «Википедии» указано, что «родители М. Г. Крейна заключили брак в Киеве в 1902 году». Однако в сохранившейся алфавитной книге о бракосочетаниях Киевской синагоги 1863-1910 годов нет этой семьи. Пришлось идти окольным путём. В упомянутых мемуарах Татьяны Селимовны Крейн-Ворониной написано, что в семье её деда Герша Нухимовича было семеро детей. Кроме Марка и самого младшего Селима, это сыновья Дмитрий и Михаил, а также три дочери: Сарра, София и Эсфирь (Фира). Следовало попытаться найти в метрических книгах запись о рождении кого-то из них. Усложняло дело то, что архивные данные по Киеву лишь частично оцифрованы и обработаны. Кроме того, были неизвестны даты (и даже годы) рождения четырёх из семи детей.

В интернете приведена информация, что Марк Григорьевич родился в Киеве 3 апреля 1907 года, а Селим Григорьевич — там же 2 июля 1917 года. Метрическую книгу о рождении за 1917 год разыскать с первой попытки не удалось. С 1907 годом повезло больше, метрическая книга оказалась доступна, но никаких сведений о рождении Марка Григорьевича в ней нет. Столь же безрезультатно окончились мои попытки найти запись о рождении в Киеве старшего сына Дмитрия в 1904 году. Всё это заставило предположить, что семья Крейнов могла переехать из Иванкова (либо откуда-то ещё) в Киев уже после свадьбы и даже рождения некоторых старших детей.

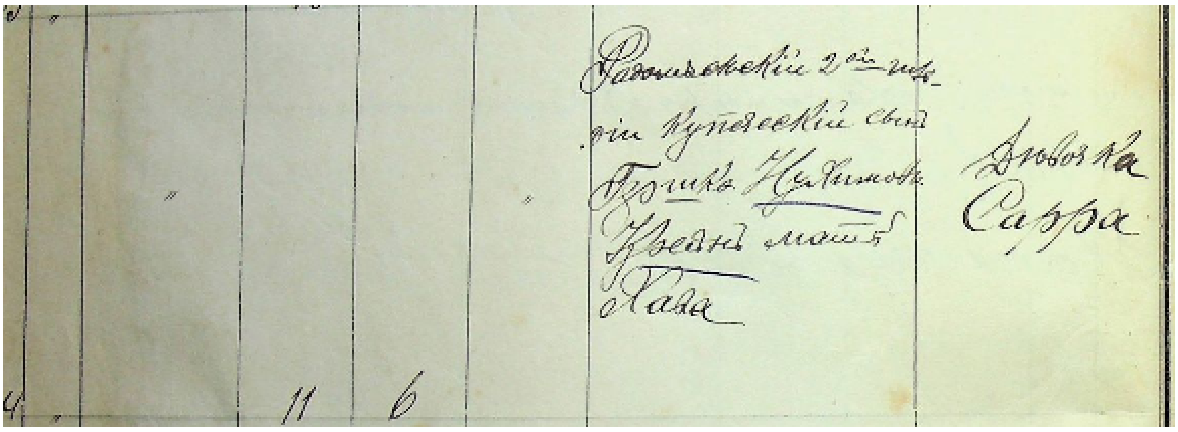

„ 83. Райхманъ Мартъ 26
„ 13.
„ Иванковскій мещанинъ Гершко Нохимовъ Крейнъ, мать Хава Мордуховна.
Сынъ Моисей.

Метрическая запись о рождении Моисея Гершковича Крейна в Киеве

Наконец, в метрической книге о рождениях киевской синагоги за 1909 год нашлась запись, из которой следовало, что 6 марта 1909 года у «Иванковского мещанина Гершко Нохимова Крейна» и его жены «Хавы Мордуховны» родился сын Моисей [9]. Надо полагать, это еврейское имя Михаила. Но даже если это какой-то другой ребёнок, возможно, умерший в младенчестве, стало ясно главное: жену Герша Нухимовича и мать его детей в 1909 году звали Хаввой Мордуховной. Совпадение довольно редких имени и отчества с таковыми же у сестры моего прадеда, вкупе с географическими соображениями, почти не оставило сомнений в моём предположении. Разница в годах рождения может легко объясняться неточностью тех данных, которые циркулируют в интернете безо всякой проверки.

Ещё одно подтверждение той же генеалогической гипотезы удалось обнаружить в метрической книге за 1901-1910 годы, которая велась в синагоге Хабно — того самого местечка, где жили мои предки, но которое даже не упоминается нигде в связи с семьёй Крейнов. Эта метрическая книга, как и ряд других полезных архивных дел, доступна на сайте фонда и мемориального центра Холокоста «Бабий Яр» [8]. Именно в Хабно 11 мая 1901 года у «Родомысльской 2-й гильдии купеческого сына Гершко Нухимова Крейна» и его жены «Хавы» родилась дочь, Сарра [10], старшая из всех детей. Так выяснилось, что информация о браке

Герша Нухимовича и Хаввы Мордуховны в Киеве в 1902 году не соответствует действительности.



Метрическая запись о рождении Сарры Гершковны Крейн в Хабно

Где же и когда поженились родители обоих выдающихся математиков? Логично предположить, что свадьбу могли сыграть либо в Хабно (где жила семья родителей невесты), либо в Иванкове (где жила семья родителей жениха). К сожалению, точно ответить на этот вопрос затруднительно. Метрические книги о бракосочетаниях в обоих этих еврейских местечках конца XIX века не сохранились. Что касается времени свадьбы, то на этот счёт можно дать не только верхнюю (не позднее 1900 года), но и нижнюю оценку. Я уже упоминал о переписи населения 1897 года. Хотя её материалы сохранились далеко не везде, но местечку Хабно в этом смысле повезло. Как я уже отмечал, именно там в семье моей прапрабабки «хозяйки мануфактурной лавки Рухли Шулимовны Фельдблюм» указана и её семнадцатилетняя дочь — «девица» Хавва Мордуховна. Перепись официально проводилась 28 января 1897 года (хотя на деле бывало по-разному), следовательно, на тот момент Хавва Мордуховна ещё не вышла замуж.

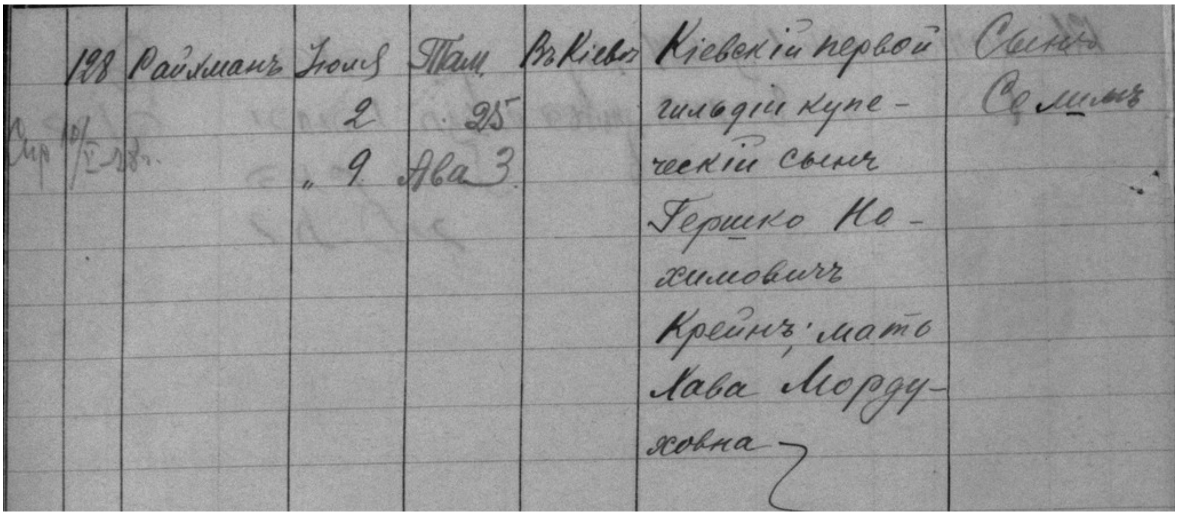
Как следует из архивных документов, после свадьбы молодая семья сначала жила в Хабно, затем в Иванкове, а в Киеве оказалась не ранее второй половины 1908 года. Первым туда почти наверняка прибыл Герш Нухимович, которому требовалось время на обустройство. По воспоминаниям его внучки Т. С. Крейн-Ворониной, это был примечательный человек. Пойдя по стопам отца, он всю свою жизнь связал с лесным делом, стал инженером-технологом. Видимо, около середины нулевых годов XX века Герш Нухимович построил лесопильню в Киеве на берегу Днепра (ул. Набережно-Крещатицкая, дом 27). Лес доставляли из лесничеств хорошо ему знакомого Радомысленского уезда, к которому относился городок Иванков.

Архивных сведений о родителях Герша Нухимовича обнаружить не удалось. Очень пригодились бы и здесь материалы переписи 1897 года по Радомысленскому уезду. Но удивительным образом сохранились переписные листы всего уезда, кроме Иванкова. Единственное известное мне дореволюционное упоминание Герша Нухимовича — в материалах дела о выборах казённого раввина в Чернобыле

1903–1907 годов. А именно, в «списке прихожан вновь разрешенного молитвенного дома Бес-Гамедраш 3-й», который был составлен в сентябре 1904 года, фигурирует «Крейн Гершко Нохимов» двадцати четырёх лет. Видимо, он родился около 1880 года, и семья его родителей тогда жила в Иванкове.

В период с 1901 по 1917 год в семье Герша Нухимовича и Хаввы Мордуховны (Евы Марковны) родилось семеро уже названных детей. Постепенно мне удалось найти в метрических книгах записи о рождении шестерых из них. Именно эти документы позволили проследить перемещения семьи из Хабно в Иванков, а оттуда в Киев. Никто из четырёх сыновей и трёх дочерей Григория Наумовича не пошёл по его стопам. Ни один даже не стал инженером. Григорий Наумович не стал мешать своим детям искать себя в новой социалистической жизни.

В советское время Герш Нухимович, ставший Григорием Наумовичем, руководил артелью «Циркулярка». При этом он арендовал помещение той же лесопильни, но уже не своей, а перешедшей в собственность государства. Говорят, он легко отдал всё то, чем раньше владел. Несмотря на индивидуальное предпринимательство Григория Наумовича, богатство, роскошь и власть никогда не были в числе приоритетов этой разветвлённой семьи. Считалось, например, что младшая дочь София Григорьевна Крейн совершила мезальянс, выйдя замуж за сына владельца мясного магазина на Невском проспекте в Ленинграде. Они жили с мужем в трехкомнатной квартире около Дворцовой площади, но, по мнению Григория Наумовича, зять был недостаточно образован. Сколько можно полагать, образованию отводилось в этой семье очень важное место.


128 Райхманъ Іюля 2 „ 9 Там 25 Ава 3 Въ Кіевѣ Кіевскій первой гильдіи купеческій сынъ Гершко Нахимовичъ Крейнъ; мать Хава Мордуховна Сынъ Селимъ

Метрическая запись о рождении Селима Григорьевича Крейна в Киеве

На уже упомянутом сайте фонда и мемориального центра Холокоста «Бабий Яр» мне удалось обнаружить и метрическую запись о рождении Селима Гершковича Крейна в Киеве 2 июля 1917 года. [11]. Любопытно, что Герш Нухимович представлен там как «Киевский первой гильдии купеческий сын». Следовательно, дела у деда новорожденного, Нухима Ицковича Крейна, перед революцией шли блестяще. Купцы первой гильдии среди евреев были исключительно редки.

В этой связи можно признать, что сестра моего прадеда сделала удачную партию, выйдя замуж за Герша Нухимовича. Впрочем, Хавва Мордуховна и сама по некоторым сведениям была дочерью купца второй гильдии. Говорить о пролетарском происхождении обоих математиков не приходится.

Впрочем, к моменту рождения Селима Гершковича ситуация заметно изменилась. Уже три года шла первая мировая война. Толпы переселенцев из прифронтовых районов заполнили города внутренних областей Российской Империи. Грянула февральская революция, старый уклад жизни рухнул. За два последующих года власть в Киеве менялась четырнадцать раз. Украина пребывала то под петроградским Временным правительством, то под Центральной Радой, большевиками, гетманом Скоропадским, Украинской Директорией, деникинцами. Среди этого хаоса и неразберихи у Герша Нухимовича и Хаввы Мордуховны родился последний седьмой ребенок. Семья восприняла рождение сына как добрый знак. Все мечты тогда были о мире, поэтому ребёнка назвали именем Селим (Шолом), в переводе означающим «мирный». Все в большой семье с детства звали его Мирой.

Детство Селима Григорьевича, кстати говоря, оказалось отнюдь не простым. К хаосу гражданской войны и еврейских погромов прибавились и проблемы со здоровьем. У ребёнка был диагностирован анкилоз коленного сустава: нога не сгибалась в колене. Из-за этого ему пришлось несколько лет фактически пролежать в кровати. Именно в этих условиях, как рассказывают друзья семьи, старший брат Марк начал давать младшему первые уроки математики. Ещё несколько лет подростку приходилось ходить с палкой, подпрыгивая на каждом шаге. Только в десятом классе школы Селиму Григорьевичу сделали операцию по разгибанию сросшегося сустава. После этого удалось обходиться без палки, но сгибаться нога в колене не могла, и хромота осталась на всю жизнь.

						Местожительство до эвакуации (откуда эвакуирован)					Кем и где работал до эвакуации			Где работает в настоящее время	
Фамилия	Имя	Отчество	Отношение к главе семьи (жена, сын, дочь и др.)	Пол	Год рождения (возраст)	Область (край, республика)	Район	Город, село	Специальность (профессия и стаж)	Национальность	наименование предприятия или учреждения	отдел, цех и т. д.	кем работал (должность)	место работы (учреждение, предприятие, колхоз)	выполняемая работа
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Крейн	Григорий	Наумович	гл. с. отец	м	1878	г. Киев		г. Киев	бухг.	евр.	главлес. снаб.	бухалт.	бухгалт.	НКВВ	бухгал.
Крейн	Эва	Марковна	жена	ж	1883	"		"	д. хоз.	"	д. хоз.	—	иждив.		иждив.
Крейн	Салим	Григорьев.	сын	м.	1917	"		"	матем.	"	универс. им. Шевченко	физмат.	аспирант по матем.	акад. наук.	ст. научн. сотр.

Эвакуационный список семьи Крейнов 1942 года

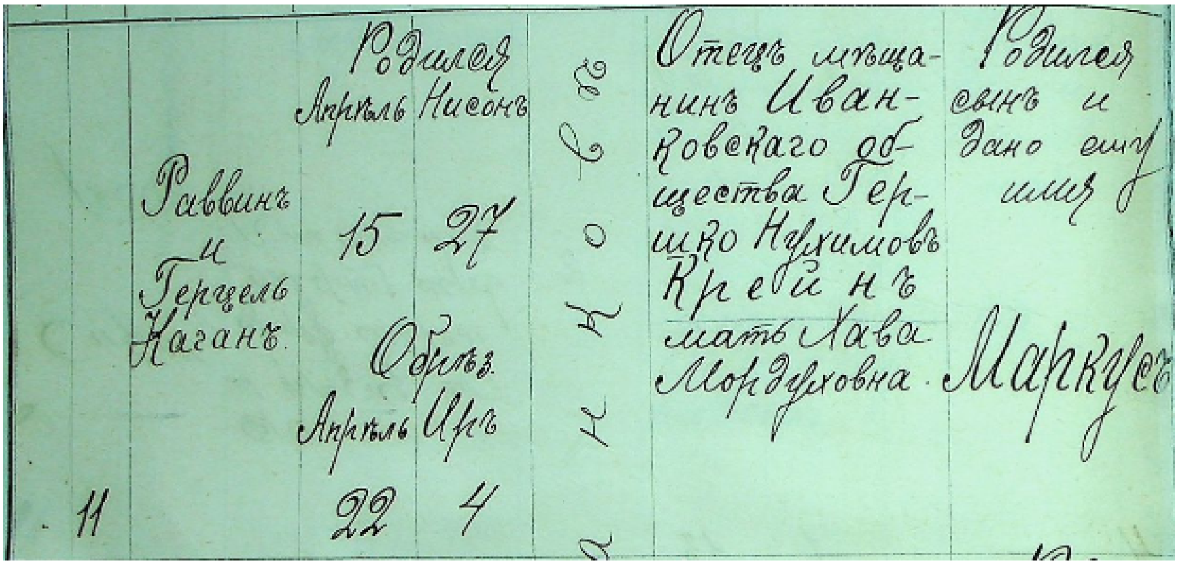
Удивительно, но этот физический недостаток не помешал Селиму Григорьевичу всерьёз заниматься спортом. Особенно он увлекался волейболом. Как пишут его сокурсники по университету, они так восхищались игрой в волейбол хромающего студента, что дали ему прозвище «чемпион». Надо ли говорить, что ещё больше поражала его сила воли. Даже много лет спустя С. Г. Крейн любил во время приёма какого-нибудь экзамена сделать перерыв на волейбольный матч с собственным участием. А в семье и среди друзей Селима Григорьевича по-прежнему звали Мирой. Это продолжилось и в Воронеже. Ученики же Селима Григорьевича между собой называли его просто С. Г.

Из-за своей ноги Селим Григорьевич был освобождён от службы в армии во время войны и был эвакуирован в Уфу, где он закончил аспирантуру и защитил кандидатскую диссертацию. В те годы он под руководством академика М. А. Лаврентьева работал над математическими проблемами теории кумулятивного заряда и в 1950 году в Академии артиллерийских наук защитил диссертацию на соискание степени доктора технических наук. Диссертация была закрытой, защиту принимали генералы-учёные. Интерес к серьёзным приложениям математики сохранился у С. Г. Крейна на всю жизнь. Академию же артиллерийских наук, как он сам шутливо потом рассказывал, распустили сразу же после его защиты.

Мемориальная доска на доме в Одессе, где жил М. Г. Крейн

Интересные подробности содержит эвакуационный список 1942 года, где перечислены трое членов семьи Крейнов: Григорий Наумович, Ева Марковна и Селим Григорьевич. Там указано, что до войны Григорий Наумович работал бухгалтером, место работы обозначено как «главлес.снаб.». В партию он не вступал, хотя коммунистические идеи об обществе благоденствия для трудящихся были созвучны его сердцу. Специальность и работа Евы (Эвы) Марковны охарактеризованы как домашнее хозяйство. Двадцатипятилетний на ту пору Селим Григорьевич «аспирант по математике» и старший научный сотрудник академии наук. По воспоминаниям Т. С. Крейн-Ворониной, Ева Марковна умерла в 1945 году. Григорий Наумович пережил жену почти на десять лет.

Только в конце архивных изысканий я сумел найти метрическую запись о рождении Марка Григорьевича Крейна. До сих пор во всех открытых источниках указано, что он родился в Киеве в 1907 году. Тот же год рождения обозначен, например, на мемориальной доске, которая украшает дом в Одессе, где работал М. Г. Крейн. Оказалось, что и год и место рождения Марка Григорьевича на самом деле другие. Он родился в городке Иванков. Выполненная каллиграфическим почерком запись [12] гласит, что 15 апреля 1908 года у «мещанина Иванковского общества Гершко Нухимова Крейна» и всё той же Хаввы Мордуховны «родился сын и дано ему имя Маркус». Похоже, что сам М. Г. Крейн в какой-то момент прибавил себе год, а заодно перенёс своё рождение в Киев. О причинах можно только гадать. Не исключено, что это было связано с обстоятельствами его трудоустройства в молодости.



11

Раввинъ и Герцель Каганъ

Родился Апрѣль 15 Нисонъ 27

Обрѣз. Апрѣль 22 Иръ 4

Отецъ мѣщанинъ Иванковскаго общества Гершко Нухимовъ Крейнъ мать Хава Мордуховна

Родился сынъ и дано ему имя Маркусъ

Метрическая запись о рождении Марка Григорьевича Крейна в Иванкове

Несколько слов о собственной семье М. Г. Крейна. Жену Марка Григорьевича звали Раисой Львовной Ромен. Она специализировалась на корабельной архитектуре и работала в Одесском институте инженеров морского транспорта. По воспоминаниям Б. Я. Левина, «всю себя она посвятила тому, чтобы создать Марку Григорьевичу хорошие условия для работы, стремилась оградить его от житейских неприятностей, не давала падать духом в трудные времена». Их дочь Ирма Марковна Крейн работала старшим научным сотрудником Института кибернетики академии наук Украины.

Если же говорить про «научных детей», то, повторюсь, на сайте Mathematics Genealogy Project (Математическая генеалогия) в качестве учеников М. Г. Крейна зарегистрировано сорок девять человек. Почётное место среди них занимает другой крупный математик Марк Александрович Красносельский, одним из многочисленных учеников которого является Юрий Серафимович Колесов. А среди учеников Ю. С. Колесова — и мой собственный научный руководитель Вячеслав Владимирович Майоров. Таким образом, автор этой статьи оказался не только двоюродным внучатым племянником Марка Григорьевича Крейна, но и его «научным праправнуком».

Ссылки

[1] *Колмогоров А. Н., Красносельский М. А.* Марк Григорьевич Крейн (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1958. Т. 13, № 3. С. 213–224.

[2] *Левин Б. Я.* Воспоминания о Марке Григорьевиче Крейне // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, № 3.

[3] *Крейн М. Г.* Избранные труды: в 3-х кн. Киев: Институт математики АН Украины, 1993–1997.

[4] Mathematics Genealogy Project (Математическая генеалогия): // https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=73921

[5] *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.

[6] *Бухштабер В. М., Кучмент П. А., Новиков С. П., Семёнов Е. М.* Памяти Селима Григорьевича Крейна (1917—1998) // Успехи математических наук. 2018. Т. 73, № 1. С. 191–193.

[7] *Крейн-Воронина Т. С.* Сын «Лесного инженера», математик, профессор С. Г. Крейн: воспоминания дочери // https://vgltu.ru/universitet/informaciya-o-zhizni-zamechatel-nyh-lyudej/vospominaniya-docheri-tatyany-krejn-voroninoj/

[8] Фонд и мемориальный центр Холокоста «Бабий Яр»: https://babynyar.org/

[9] Центральный государственный исторический архив Украины: Фонд 1164, опись 1, дело 128, лист 56.

[10] Центральный государственный исторический архив Украины: Фонд 1167, опись 1, дело 500, лист 9.

[11] Центральный государственный исторический архив Украины: Фонд 1164, опись 1, дело 161, лист 119.

[12] Центральный государственный исторический архив Украины: Фонд 1167, опись 1, дело 169, лист 85.

УДК 004.056+378.147

М. В. Краснов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: kmvivt@uniyar.ac.ru

О преподавании курса «Информационная безопасность»

В работе обсуждаются причины перехода на смешанный формат обучения. Для дисциплины «Информационная безопасность» выбрана модель «внеурочная деятельность». Рассматривается способ повышения мотивации студентов.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: проект, смешанный формат обучения, мотивация.

В настоящее время сложно представить развитое государство, которое не использовало бы цифровые технологии для увеличения своего благосостояния. Постиндустриальное общество перешло в новое состояние – информационное общество, которое определяется повышением значимости интеллектуального труда, ростом значения информации. Одной из задач, которые встают при переходе в информационное общество, является обеспечение информационной безопасности [1]. В настоящее время базовые знания в сфере информационной безопасности являются необходимыми для студентов любых специальностей и направлений, так как число преступлений, совершаемых с помощью компьютерной техники или средств массовой информации, постоянно увеличивается.

Информационная безопасность имеет многогранный характер. Основными составляющими элементами ИБ считаются обеспечение конфиденциальности, целостности и доступности к информационным ресурсам. Также важными являются вопросы, которые затрагивают социальные и психологические аспекты. Следует обратить внимание на развитие критического мышления, студенты должны уметь оценивать риски и принимать решений в условиях неопределённости. Очень важно, чтобы студенты ответственно относились к собственной безопасности особенно в Интернете. Учитывая вышесказанное и из-за малого количества учебных часов, следует часть материала давать студентам в дистанционном режиме.

Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации предусматривает использования информационных и коммуникационных технологий для разработки новых форм и методов обучения, включая дистанционные [2].

Отметим, что число студентов, обучающихся с применением дистанционных образовательных технологий, составляло в 2023/2024 уч. г. 2010,9 тыс. человек, или 46% общей численности студентов [3].

Дистанционное образование, кроме преимуществ, обладает рядом недостатков, например, таких:

- преподавателю приходится лучше продумывать темы и формы подачи материала;
- имеется проблема идентификация студентов при проведении контрольных мероприятий;
- необходимо повышать мотивацию к обучению.

Автору представляется целесообразным использование обоих форматов обучения. Традиционные аудиторные занятия должны сочетаться с элементами электронного, дистанционного обучения. Для курса «Информационная безопасность» была выбрана модель смешанного обучения – «внеурочная деятельность». В данной модели в аудитории происходит изучение нового материала, а его закрепление выполняется в домашних условиях с использованием информационных ресурсов онлайн курса.

Проблемы, которые возникают при преподавании данного курса:

- отбор материала, который большей частью рассматривается на очных занятиях;
- удержание интереса у студентов к курсу.

Перечислим темы, которые следует рассматривать на очных занятиях (эти темы способствуют развитию профессиональных компетенций):

- современные методы шифрования данных;
- электронные подписи;
- хэш-функции;
- политика и модели безопасности.

Перечислим темы, которые следует в основном рассматривать на занятиях с дистанционной формой обучения (эти темы способствуют развитию общепрофессиональных компетенций):

- информация как объект защиты;
- история становления теории информационной безопасности;
- правовые (законодательные) аспекты информационной безопасности;
- понятие об информационной гигиене;
- борьба с «фейковыми новостями»;
- информационные войны и информационное противоборство.

Для поддержания и повышения мотивации у студентов можно предпринять следующие шаги.

- Использовать технологию сторителлинга при рассмотрении некоторых тем.

  Сторителлинг – это педагогическая техника, где истории (реальные или придуманные) со структурой, целью и героем используются для обучения, развития и мотивации студентов. Он выполняет функции наставничества, мотивации, воспитания, образования и развития, вызывая эмоциональный отклик и активизируя студентов. Применение сторителлинга позволит студентам достичь более глубокого впечатления и понимания учебных тем [4].

  При создании истории в формате сторителлинга обычно стараются, чтобы она обладала следующими свойствами:

  – вызывала эмоциональную реакцию у студентов;
  – имела ключевую мысль, которой и следует придерживаться в ходе всего повествования;
  – история должна быть увлекательной, то есть содержать неожиданные повороты в развитии;
  – у истории должна быть понятная мораль.

Пример истории (на ответственное отношение к собственной безопасности). Иван получил звонок якобы от сотрудника своего банка, и ему сообщили, что возможный мошенник пытается сделать некоторые операции с его банковскими картами. Звонивший человек требовал сообщить данные о банковской карте якобы для выполнения операции идентификации Ивана. Иван сообщил эти данные. В результате Иван потерял значительную сумму денег, а его данные могли быть использованы для дальнейших мошеннических действий. Мораль: всегда будьте бдительны к подозрительным письмам, ссылкам и телефонным звонкам.

Пример истории (на информационное противоборство). Известно, что с ноября 1942 г. по февраль 1943 г. советскими войсками проводилась Сталинградская стратегическая наступательная операция, или операция «Уран». Также примерно в это же время проводилась Ржевско-Сычёвская наступательная операция, или операция «Марс». Операция «Марс» носила вспомогательный характер. И хотя она не достигла главной цели — уничтожения Ржевского выступа, но имела важное стратегическое значение: она не дала немцам перебросить войска для усиления группировки под Сталинградом.

В разведывательном управлении НКВД планировалось создание канала по дезинформации противника (операция «Монастырь»). Идея операции «Монастырь» принадлежала П. А. Судаплатову. В качестве основного исполнителя выступал советский разведчик А. П. Демьянов. Операция была прекращена летом 1944 г. Операция «Монастырь» позволила снабжать немцев дезинформацией считается, что Советское главнокомандование специально «слило» информацию о подготовке наступления подо Ржевом, чтобы отвлечь внимание противника от основных направлений ударов), вылавливать часть агентов, которые забрасывались Абвером на территорию СССР. Мораль: развивать информационную безопасность очень важно, и способы защиты должны быть комплексными.

- Студентам предлагается принять участие в проектном мероприятии в рамках учебной деятельности. Под проектом будем понимать решение следующих задач:
  - выбор языка программирования;
  - реализация какого-либо алгоритма шифрования или электронной подписи;
  - написание эссе по темам, которые формируют общепрофессиональные компетенции (например, написание эссе-убеждения, что некоторая новость является фейком).

Ссылки

[1] Указ Президента РФ от 9 мая 2017 г. № 203 «О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017 – 2030 годы »[Электронный ресурс]. URL: https://base.garant.ru/71670570 (дата обращения 22.09.2025).

[2] Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс]. URL: http://www.kremlin.ru/acts/bank/36698 (дата обращения 22.09.2025).

[3] Индикаторы образования: 2025 : статистический сборник / Н. В. Бондаренко, Т. А. Варламова, Л. М. Гохберг и др.; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». М. : ИСИЭЗ ВШЭ, 2025. 452 с.

[4] *Паюсова Т. И.* Возможности сторителлинга в преподавании кибербезопасности // Высшее образование в России. 2025. Т. 34. № 3. С. 113–137.

УДК 519.25

А. Н. Морозов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: moroz@uniyar.ac.ru

О модификации экспоненциального скользящего среднего

Скользящее среднее значение (Moving Average, MA) – один из старейших и распространённых инструментов для цифровой обработки данных. Наиболее важными считаются два вида: простое скользящее среднее (Simple MA, SMA) и экспоненциальное скользящее среднее (Exponential MA, EMA). Оба имеют очевидные достоинства и недостатки. Предлагается способ помещения таких скользящих средних в одну шкалу – построена обобщённая формула для весов MA, приводящая в частных случаях к SMA и EMA. Это позволяет для конкретных данных лучше подобрать индивидуальные настройки MA с целью достижения наилучших результатов.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: данные, обработка, скользящее среднее, шкала весов.

В ряде курсов по обработке статистической информации ключевой концепцией для изучения и прогнозирования данных определённого вида (показателей) является понятие временно́го ряда. Временны́м (или динамическим) рядом (сокращённо ВР) будем называть последовательность (упорядоченный набор) значений $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ некоторой величины $Y(t)$, вычисленных (зафиксированных) в равноудалённые моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$, т. е. $y_k = Y(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Главными направлениями в теории ВР являются исследование их структуры (проверка наличия зависимости в значениях ряда или их случайности, присутствия цикличности, трендов и других закономерностей) и прогнозирование (создание на основе имеющейся информации научно обоснованных суждений о дальнейшем поведении ВР).

Скользящее среднее значение (Moving Average, MA) – один из старейших и распространённых инструментов для цифровой обработки данных, а математические конструкции на основе MA – важнейшие численные динамические характеристики ВР. Наиболее актуальными и интересными считаются два вида скользящих средних: простое скользящее среднее (Simple MA, *SMA*) и экспоненциальное скользящее среднее (Exponential MA, *EMA*).

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ – последовательность данных – ВР. Простое скользящее среднее вычисляется путём сложения и усреднения значений на определённом участке времени (отсчётов):

$$SMA_i(m) = \frac{y_{i-m+1} + \ldots + y_{i-1} + y_i}{m} = \frac{1}{m} \cdot y_{i-m+1} + \ldots + \frac{1}{m} \cdot y_{i-1} + \frac{1}{m} \cdot y_i.$$

где m – количество отсчётов, на которых рассматриваются данные (период усреднения). С точки зрения цифровой обработки сигнала SMA – линейный цифровой фильтр с конечной импульсной характеристикой. Для этого фильтра веса последних m рассматриваемых членов набора данных постоянны и равны $1/m$, остальные члены набора имеют нулевой вес. SMA преобразует исходный ВР в ряд из локально усреднённых значений. Фактически происходит определённое сглаживание (графика) данных: чем больше m, тем более существенное сглаживание.

Экспоненциальное скользящее среднее определяется рекуррентной формулой:

$$EMA_i(v) = (1-v) \cdot EMA_{i-1}(v) + v \cdot y_i = \ldots + v \cdot (1-v)^k \cdot y_{i-k} + \ldots + v \cdot (1-v) \cdot y_{i-1} + v \cdot y_i,$$

где $EMA_i(v)$ – текущее значение экспоненциального скользящего среднего, $EMA_{i-1}(v)$ – предыдущее значение EMA, y_i – последнее рассматриваемое значение данных, v – параметр (который можно изменять от 0 до 1), определяющий степень сглаживания.

Во многих случаях предпочтения и настройки (виды и периоды усреднения) MA формируются на основе статистических выводов. Теоретически, у EMA есть два преимущества перед SMA. Во-первых, оно делает более значимыми последние значения временного ряда. Это важно для изучения экспериментальных данных, в которых отслеживаются и общие, и локальные тенденции, например, для медицинских показаний. Во-вторых, EMA в отличие от SMA не «скачет» из-за сбрасывания старых данных – они «исчезают» постепенно. Но есть и очевидный недостаток – для корректного применения EMA нужен очень большой (бесконечный) имеющийся набор данных.

Построим скользящее среднее, сочетающее черты EMA и SMA. Пусть $\big(\ldots, 0, 0, p_m, p_{m-1}, \ldots, p_2, p_1\big)$ – коэффициенты (веса) в искомой формуле MA. Потребуем, чтобы $p_m, p_{m-1}, \ldots, p_2, p_1$, как в EMA, составляли убывающую геометрическую прогрессию (справа налево) и $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$ (такое условие является необходимым для весов любого скользящего среднего, чтобы воспроизводить набор постоянных значений). Решив уравнение $\lambda \cdot \sum_{k=1}^{m} v \cdot (1-v)^{k-1} = 1$, находим нормирующий множитель и набор весов:

$$\lambda = \lambda_m = \frac{1}{1-(1-v)^m} \implies \left(\ldots, 0, 0, \frac{v \cdot (1-v)^{m-1}}{1-(1-v)^m}, \ldots, \frac{v \cdot (1-v)}{1-(1-v)^m}, \frac{v}{1-(1-v)^m} \right).$$

Определим

$$UMA_i(v, m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{1-(1-v)^m} \cdot \Big((1-v)^{m-1} \cdot y_{i-m+1} + \ldots + (1-v) \cdot y_{i-1} + y_i \Big)$$

– как формулу MA, построенного на основе EMA и корректно работающего с конечным набором данных.

Рассмотрим взаимосвязи полученной конструкции с *SMA* и *EMA*. Пусть

$$\overline{SMA}(m)=\Big(\,\ldots,\,0,\ \frac{1}{m},\,\ldots,\,\frac{1}{m},\,\frac{1}{m}\Big);\quad \overline{EMA}(v)=\Big(\,\ldots,\,v{\cdot}(1-v)^k,\,\ldots,\,v{\cdot}(1-v),\ v\Big);$$

$$\overline{UMA}(v,m)=\Big(\,\ldots,\,0,\ \frac{v{\cdot}(1-v)^{m-1}}{1-(1-v)^m},\,\ldots,\,\frac{v{\cdot}(1-v)}{1-(1-v)^m},\,\frac{v}{1-(1-v)^m}\Big).$$

Теорема 1.

$$\lim_{v\to 0}\ \overline{UMA}(v,m)=\overline{SMA}(m).$$

Доказательство. $\overline{UMA}(v,m)$ и $\overline{SMA}(m)$ можно рассмотреть как конечномерные векторы (из $\mathbb{R}^m$), поэтому достаточно показать покоординатную сходимость. Так как координаты $\overline{UMA}(v,m)$ монотонно убывают справа-налево, а координаты $\overline{SMA}(m)$ постоянны, то покоординатная сходимость равносильна сходимости первой и последней координат $\overline{UMA}(v,m)$ к $\frac{1}{m}$. Это легко проверяется при помощи правила Лопиталя. □

Теорема 2. *По метрике пространства* l_1

$$\lim_{m\to\infty}\ \overline{UMA}(v,m)=\overline{EMA}(v).$$

Доказательство. Поскольку при $k=0,1,\ldots,m{-}1$ выполняется

$$\frac{v{\cdot}(1-v)^k}{1-(1-v)^m}\ -\ v{\cdot}(1-v)^k=\frac{v{\cdot}(1-v)^{k+m}}{1-(1-v)^m},$$

то получаем, что $\overline{UMA}(v,m)-\overline{EMA}(v)=$

$$=\Big(\,\ldots,\,-v{\cdot}(1-v)^{m+1},\,-v{\cdot}(1-v)^m,\ \frac{v{\cdot}(1-v)^{2m-1}}{1-(1-v)^m},\,\ldots,\,\frac{v{\cdot}(1-v)^{m+1}}{1-(1-v)^m},\,\frac{v{\cdot}(1-v)^m}{1-(1-v)^m}\Big).$$

Сумма модулей всех отрицательных координат равна $(1-v)^m$. Несложно убедиться, что такую же величину имеет сумма всех положительных координат. □

Логичным и одновременно интересным фактом является то, что значения *UMA* могут быть выражены через два значения соответствующего *EMA*.

Предложение.

$$UMA_i(v,m)=(1-\lambda_m){\cdot}EMA_{i-m}(v)+\lambda_m{\cdot}EMA_i(v),\qquad \lambda_m=\frac{1}{1-(1-v)^m}.\qquad (1)$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$\frac{1}{1-(1-v)^m}{\cdot}\Big(EMA_i(v)-(1-v)^m{\cdot}EMA_{i-m}(v)\Big)=UMA_i(v,m)$$

Раскрыв скобки и введя обозначение λ_m, получаем формулу (1). □

Замечание 1. Пусть даны два вектора $\overline{OM_0}$ и $\overline{OM_1}$. Как известно, формула $(1-t)\cdot\overline{OM_0}+t\cdot\overline{OM_1}$ при изменении t от 0 до 1 «перебирает» все векторы от $\overline{OM_0}$ (при $t=0$) до $\overline{OM_1}$ (при $t=1$), конечные точки которых лежат на отрезке $\big[M_0;M_1\big]$. Это классическая интерполяционная формула.

При $t < 0$ или $t > 1$ по этой формуле получаем экстраполяцию комплекса из двух упорядоченных векторов соответственно за $\overline{OM_0}$ или за $\overline{OM_1}$.

Поскольку $\frac{1}{1-(1-v)^m} > 1$, то согласно формуле (1) $UMA_i(v,m)$ даёт прогнозное значение EMA $\big($по $EMA_{i-m}(v)$ и $EMA_i(v)\big)$.

Замечание 2. Значения EMA имеют рекурентную зависимость, значит, UMA может быть вычислено рекуррентно. Из (1) получаем следующее соотношение для значений UMA (его легко проверить непосредственно):

$$UMA_i(v,m) = (1-v)\cdot UMA_{i-1}(v,m) + v\cdot\big((1-\lambda_m)\cdot y_{i-m} + \lambda_m\cdot y_i\big)$$

Отметим, что второе слагаемое в правой части представляет собой любопытную комбинацию выбывающего из диапазона усреднения значения ВР и добавляемого в него.

Наконец, теорему 2 можно уточнить таким образом.

Теорема 3.

$$UMA_{m+1}(v,\, m+1) = \big(1-\mu_{m+1}\big)\cdot UMA_m(v,m) + \mu_{m+1}\cdot y_{m+1}, \quad m \in \mathbb{R},$$

где

$$UMA_1(v,1) = y_1, \qquad \mu_{m+1} = \frac{v}{1-(1-v)^{m+1}}.$$

Доказательство. Пусть имеются значения $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m$. Получим

$$UMA_m(v,m) = \frac{v\cdot(1-v)^{m-1}}{1-(1-v)^m}\cdot y_1 + \cdots + \frac{v\cdot(1-v)}{1-(1-v)^m}\cdot y_{m-1} + \frac{v}{1-(1-v)^m}\cdot y_m.$$

Пусть теперь имеются значения $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m,\, y_{m+1}$. Получим

$$UMA_{m+1}(v,\, m+1) = \frac{v\cdot(1-v)^m}{1-(1-v)^{m+1}}\cdot y_1 + \cdots + \frac{v\cdot(1-v)}{1-(1-v)^{m+1}}\cdot y_m + \frac{v}{1-(1-v)^{m+1}}\cdot y_{m+1}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$UMA_{m+1}(v,\, m+1) = \frac{(1-v)\cdot\big(1-(1-v)^m\big)}{1-(1-v)^{m+1}}\cdot UMA_m(v,m) + \frac{v}{1-(1-v)^{m+1}}\cdot y_{m+1}.$$

Определив

$$\mu_{m+1} = \frac{v}{1-(1-v)^{m+1}} = v\cdot\lambda_{m+1},$$

приходим к требуемому утверждению. При $m\to\infty$ имеет место $\mu_m \to v$. □

Более подробные доказательства и ещё ряд свойств UMA можно найти в [2]. Там же рассмотрены конструкции на основе скользящих средних, предназначенные для оценки состояния ВР и прогнозирования.

Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова № VIP-016.

Ссылки

[1] *Боглаев Ю. П.* Вычислительная математика и программирование: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1990.

[2] *Морозов А. Н.* Вычислительные методы анализа графиков рыночных цен: учебно-методическое пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2020.

УДК 517.51+514.17

М. В. Невский

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: mnevsk55@yandex.ru.ru

Приложение многочленов Лежандра к оцениванию интерполяционных проекторов

Приводятся оценки минимальной нормы проектора при линейной интерполяции на произвольном компакте в $\mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка которого имеет ненулевой объём. Нижняя оценка получается с применением одного геометрического свойства классических многочленов Лежандра.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: интерполяция, проектор, норма, многочлены Лежандра.

Стандартизованный многочлен Лежандра степени n определяется равенством

$$\chi_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(формула Родрига). По поводу свойств χ_n см., например, [5]. Многочлены Лежандра ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(t) \equiv 1$. Первые многочлены χ_n имеют вид

$$\chi_0(t) = 1, \quad \chi_1(t) = t, \quad \chi_2(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2-1\right), \quad \chi_3(t) = \frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right),$$

$$\chi_4(t) = \frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right), \quad \chi_5(t) = \frac{1}{8}\left(63t^5-70t^3+15t\right).$$

Полный набор многочленов Лежандра может быть получен из рекуррентного соотношения

$$\chi_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1}\, t\cdot\chi_n(t) - \frac{n}{n+1}\,\chi_{n-1}(t). \tag{1}$$

Из (1) следует $\chi_n(1)=1$. Напомним, что если $n \geq 1$, то $\chi_n(t)$ возрастает при $t \geq 1$. Эти свойства получаются и из приводимой ниже формулы (3). Через χ_n^{-1} обозначим функцию, обратную к χ_n на полуоси $[1,+\infty)$.

В 2003 г. автором получено геометрическое описание многочленов Лежагндра, а именно их характеризация через объёмы выпуклых многогранников. Это свойство было опубликовано в статье [1], которая малодоступна широкой аудитории. Для удобства читателей доказательство приводится и в других работах автора, в частности, в [3] и [6]. Указанное свойство многочленов χ_n состоит в следующем.

Для $\gamma \geq 1$ введём в рассмотрение множество

$$E_{n,\gamma} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j \right| \leq \gamma \right\}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Выполняются равенства*

$$\mathrm{mes_n}(E_{n,\gamma}) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 (\gamma-1)^{n-i}(\gamma+1)^i = \frac{\chi_n(\gamma)}{n!}. \tag{3}$$

Приведём примеры. Иллюстрации взяты из учебного пособия [4].

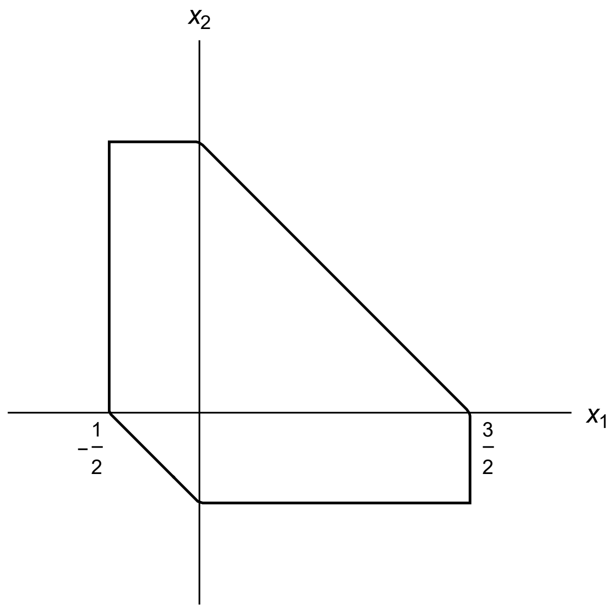


Рис. 1: Множество $E_{2,2}$

Пусть $\gamma = 2$. Одномерное множество $E_{1,2} = \{x \in \mathbb{R} : |x| + |1-x| \leq 2\}$ есть отрезок $[-1/2, 3/2]$, длина которого $\mathrm{mes}_1(E_{1,2}) = \chi_1(2)/1! = 2$. Множество

$$E_{2,2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| + |1 - x_1 - x_2| \leq 2\}$$

представляет собой шестиугольник на плоскости, площадь которого $\mathrm{mes}_2(E_{2,2}) = \chi_2(2)/2! = 11/4$. См. рис. 1. Наконец, трёхмерная область

$$E_{3,2} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| + |1 - x_1 - x_2 - x_3| \leq 2\}$$

изображена на рис. 2. Объём этого многогранника $\mathrm{mes}_3(E_{3,2}) = \chi_3(2)/3! = 17/6$.

Было обнаружено весьма неожиданное приложение соотношений (3) к поллиномиальной интерполяции функций многих переменных. Именно, эти соотношения позволяют получить нижние оценки операторных норм интерполяционных проекторов. Ниже рассматривается случай линейной интерполяции непрерывных

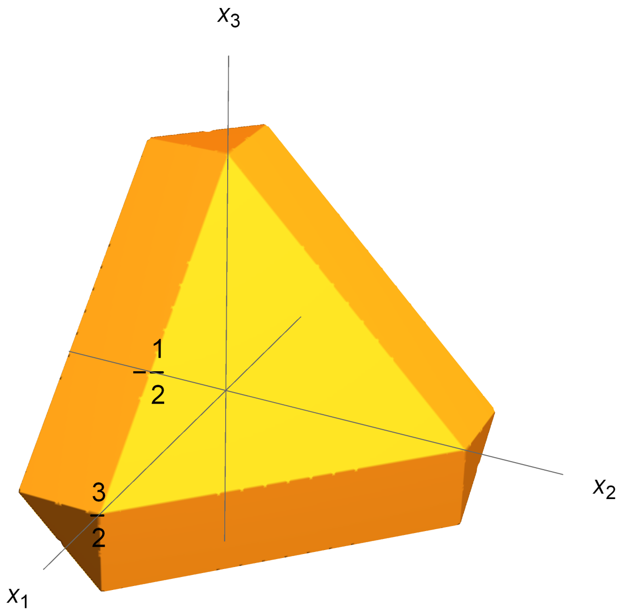


Рис. 2: Множество $E_{3,2}$

функций, заданных на компактном подмножестве $\mathbb{R}^n$. Этот подход можно перенести и на интерполяцию с помощью более широких пространств многочленов.

Пусть E — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$. Под $C(E)$ будем понимать пространство непрерывных функций $f : E \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(E)} = \max_{x\in E} |f(x)|.$$

Через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1.

Обозначим $K = \mathrm{conv}(E)$. Предположим, что $\mathrm{vol}(K) > 0$. Пусть точки $x^{(j)} \in E$, $1 \leq j \leq n+1$, являются вершинами n-мерного невырожденного симплекса. Интерполяционный проектор $P : C(E) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами $x^{(j)}$ определяется равенствами

$$Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right), \quad 1 \leq j \leq n+1.$$

Под $\|P\|_E$ будем понимать $C(E)$-операторную норму проектора, т. е. норму P как оператора из $C(E)$ в $C(E)$. Через $\theta_n(E)$ обозначим минимальную норму $\|P\|_E$ из всех проекторов с узлами $x^{(j)} \in E$. Пусть $\mathrm{simp_n}(E)$ есть максимальный объём симплекса, вершины которого принадлежат компакту E.

Теорема 2. *Справедливы оценки*

$$\chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{simp_n}(E)}\right) \le \theta_n(E) \le n+1. \tag{4}$$

Доказательства оценок (4) приводятся в [3]. Наиболее трудоёмким является левое неравенство, именно оно доказывается с применением теоремы 1. Правая оценка в (4) получается из рассмотрения проектора, узлы которого $x^{(j)} \in E$ находятся в вершинах симплекса максимального объёма, т. е. объёма, равного $\mathrm{simp_n}(E)$.

В случаях, когда E — n-мерный куб или n-мерный шар, левое неравенство из (4) даёт возможность получить оценки вида $\theta_n(E) \ge c\sqrt{n}$. Если E — n-мерный куб, то эта оценка неулучшаема по размерности по крайней мере для тех n, когда существует матрица Адамара порядка $n+1$. Если же E — n-мерный шар, то для всех n выполняется соотношение $\sqrt{n} \le \theta_n(E) \le \sqrt{n+1}$. Точное значение $\theta_n(B)$ для n-мерного шара B найдено в [2].

В заключение отметим интересную открытую проблему, связанную с равенством (3). Наряду с формулой Родрига и другими известными соотношениями, (3) даёт характеризацию многочленов Лежандра — их можно определить и через объёмы выпуклых многогранников. Именно, для $t \ge 1$

$$\chi_n(t) = n!\,\mathrm{mes}_n(E_{n,t}), \tag{5}$$

где $E_{n,t}$ определяется равенством (2). Возникает вопрос об аналогах (5) для других классов ортогональных многочленов, таких как многочлены Чебышёва или, более широко, многочлены Якоби. Представляет ли равенство (5) частный случай некоторой общей закономерности? Ответ на этот вопрос автору неизвестен.

Ссылки

[1] *Невский М. В.* Оценки для минимальной нормы проектора при интерполяции по вершинам n-мерного куба // Модел. и анализ информ. систем. 2003. Т. 10, № 1. С. 9–19.

[2] *Невский М. В.* О минимальной норме проектора при линейной интерполяции на n-мерном шаре // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 3. С. 477–480.

[3] *Невский М. В.* Оценивание интерполяционных проекторов с применением многочленов Лежандра // Модел. и анализ информ. систем. 2024. Т. 31, № 3. С. 316–337.

[4] *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии. Часть II: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2022.

[5] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962.

[6] *M. Nevskii.* Optimal Lagrange Interpolation Projectors and Legendre Polynomials. arXiv:2405.01254.

УДК 514.17

М. В. Невский
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: mnevsk55@yandex.ru.ru

О минимальном правильном симплексе, содержащем единичный куб в $\mathbb{R}^n$

Обозначим через l_n минимальную длину ребра n-мерного правильного симплекса, содержащего единичный куб $\mathbb{R}^n$. В статье доказывается, что для любого натурального n

$$n \le l_n \le \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right).$$

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный куб, длина ребра.

Задача о минимальном правильном симплексе, содержащем единичный куб в $\mathbb{R}^n$, интересна сама по себе, а также может использоваться в обучении студентов (например, в плане получения оценок численными методами).

Ниже $n \in \mathbb{N}$. Под *высотой* n-мерного правильного симплекса понимается расстояние от вершины симплекса до $(n-1)$-мерной грани, содержащей остальные вершины, а также и сам отрезок, на котором реализуется это расстояние. Основание перпендикуляра, опущенного из данной вершины на противоположную $(n-1)$-мерную грань, совпадает с центром тяжести последней. Высота n-мерного правильного симплекса с ребром a равна

$$h = a\sqrt{\frac{n+1}{2n}}. \tag{1}$$

Простой и хорошо извнестный способ доказательства состоит в рассмотрении правильного n-мерного симплекса $S = \operatorname{conv}(e_1, \ldots, e_{n+1})$, где $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — канонический базис $\mathbb{R}^{n+1}$. Высота, проведённая из вершины e_{n+1}, есть

$$\left\| e_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i \right\| = \left\| \left(-\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}, 1\right) \right\| = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

(здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^{n+1}$). Поскольку длина ребра S равна $\sqrt{2}$, то высота правильного n-мерного симплекса с ребром a вычисляется с помощью (1).

Обозначим через l_n минимальную длину ребра n-мерного правильного симплекса, содержащего единичный куб $\mathbb{R}^n$, т. е. n-мерный куб с длиной ребра 1.

Теорема. *При любом* n

$$n \le l_n \le \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Нижняя оценка в (2) сразу следует из результатов статьи автора [1]. В ней доказано, что если n-мерный симплекс содержит куб $Q_n = [0,1]^n$, то для некоторого i этот симплекс содержит отрезок длины n, параллельный i-й координатной оси. Если симплекс является правильным, то длина его ребра не меньше чем длина отмеченного отрезка. Поэтому длина ребра любого правильного симплекса, содержащего Q_n, не меньше n. Следовательно, $l_n \ge n$.

То же неравенство следует из формулы

$$\alpha(Q_n; S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)},$$

установленной в [2] для любого n-мерного симплекса S. Здесь $\alpha(Q_n; S)$ — минимальное $\sigma > 0$, такое что Q_n содержится в трансляте симплекса σS, $d_i(S)$ — i-й осевой диаметр S, т. е. максимальная длина отрезка из S, параллельного i-й оси. Если $Q_n \subset S$, то $\alpha(Q_n; S) \le 1$, значит, при некотором i выполняется $1/d_i(S) \le 1/n$ и $d_i(S) \ge n$. Отсюда, как и выше, получаем $l_n \ge n$.

Докажем верхнюю оценку для l_n. Обозначим правую часть (2) через σ_n:

$$\sigma_n := \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right),$$

и покажем, что для любого n существует n-мерный правильный симплекс с длиной ребра σ_n, содержащий единичный куб. Это и будет означать, что $l_n \le \sigma_n$.

Доказательство проведём по индукции, указав явную процедуру построения искомого правильного симплекса.

При $n = 1$ одномерный единичный куб $Q^{(1)}$ и содержащий его правильный симплекс $S^{(1)}$ совпадают с одним и тем же отрезком единичной длины. Это соответствует равенству $\sigma_1 = 1$.

Пусть для $n \ge 2$ построен $(n-1)$-мерный правильный симплекс $S^{(n-1)}$ с длиной ребра σ_{n-1}, содержащий единичный $(n-1)$-мерный куб $Q^{(n-1)}$. Рассмотрим правильный n-мерный симплекс T с длиной ребра σ_{n-1}. Выберем некоторую $(n-1)$-мерную грань G этого симплекса. По предположению, в этой грани помещается $(n-1)$-мерный единичный куб, обозначим его также через $Q^{(n-1)}$. Из каждой вершины этого куба $y^{(j)}$, $1 \le j \le 2^{n-1}$, проведём отрезки единичной длины, ортогональные G и направленные вовне симплекса T. Вторые концы $z^{(j)}$ этих отрезков лежат в одной гиперплоскости H, параллельной грани G и отстоящей от последней на расстояние 1. Пусть x — вершина симплекса T, не принадлежащая G. Продолжим рёбра T, исходящие из этой вершины, до пересечения с гиперплоскостью H.

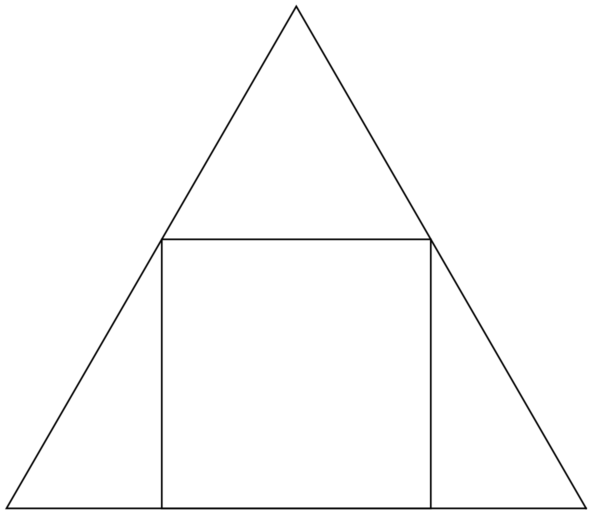


Рис. 1: Двумерный симплекс $S^{(2)}$

Точки пересечения этих рёбер с H, а также вершина x дают набор вершин нужного нам n-мерного правильного симлекса $S^{(n)}$. Пусть G^* — $(n-1)$-мерная грань симплекса $S^{(n)}$, противоположная вершине x. Заметим, что $z^{(j)} \in G^*$, поскольку ортогональная проекция любой точки правильного симплекса на гиперплоскость его грани принадлежит этой грани симплекса. Обозначим через $Q^{(n)}$ n-мерный куб, вершины которого суть сточки $y^{(j)}$ и $z^{(j)}$. Этот куб и является искомым единичным кубом, содержащимся в симплексе $S^{(n)}$. Заметим, что его $(n-1)$-мерная грань с вершинами $z^{(j)}$, $1 \leq j \leq 2^{n-1}$, содержится в $(n-1)$-мерной грани G^* симплекса $S^{(n)}$.

Для завершения доказательства осталось показать, что длина d ребра симплекса $S^{(n)}$ равна σ_n. Обозначим через h высоту $S^{(n)}$. В соответствии с (1) имеем

$$h = d\sqrt{\frac{n+1}{2n}}.$$

Очевидно, что высота симплекса T, проведённая из вершины x, равна $h-1$. Поскольку симплексы T и $S^{(n)}$ подобны, отношение длин их рёбер совпадает с отношением высот:

$$\frac{\sigma_{n-1}}{d} = \frac{h-1}{h} = 1 - \frac{1}{h}.$$

Отсюда

$$\sigma_{n-1} = d - \frac{d}{h} = d - \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Таким образом,

$$d = \sigma_{n-1} + \sqrt{\frac{2n}{n+1}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) + \sqrt{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sigma_n.$$

Теорема доказана. □

Следствие. При любом n верно $n \le l_n < \sqrt{2}n$.

Особый интерес представляет вопрос о точных значениях l_n. Несмотря на простоту формулировки, общий результат в этой задаче получить необычайно трудно. Коротко остановимся на первых числах l_n.

Для $n = 1$ и $n = 3$ имеет место равенство $l_n = \sigma_n$. Одномерный случай тривиален, а трёхмерный разобран в статье [3], где и доказано, что $l_3 = \sigma_3$. В двумерном случае, кроме ситуации, изображённой на рис. 1, можно рассмотреть и другое симметричное расположение треугольника и квадрата, когда квадрат не является вписанным. Именно, пусть правильный треугольник S содержит единичный квадрат, расположенный так, что одна вершина квадрата находится в середине стороны S, а две соседних с ней вершины квадрата лежат симметрично на двух других сторонах треугольника. Длина стороны S оказывается равной

$$\frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3} = 2.2307\ldots$$

Это превышает значение

$$\sigma_2 = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} = 2.1547\ldots$$

Вполне возможно, что $l_2 = \sigma_2$.

Автор благодарен А. Ю. Ухалову за изготовление иллюстрации к статье.

Ссылки

[1] *Невский М. В.* Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593.

[2] *M. Nevskii.* Properties of axial diameters of a simplex // Discr. Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

[3] *C. S. Ogilvy and D. P. Robbins.* Finding a cube in a tetrahedron. In: Elementary Problems and Solutions // Amer. Math. Monthly. V. 83, № 1 (Jan., 1976). P. 54–58.

УДК 514.177.2+517.97

Е. А. Тимофеев
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: timofeevEA@gmail.com

Применение отладочной функции для доказательства свойств перечислимых множеств

Описано построение отладочной функции, которая строится по заданной частично рекурсивной функции и является всюду определенной. Показано ее применение для упрощения доказательства некоторых свойств перечислимых множеств. В частности, для доказательства теоремы Поста.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: частично рекурсивная функция, перечислимое множество, программа, теория алгоритмов.

Статья состоит из трех частей. В первой части показано, как по заданной программе на МНР (машине с неограниченными регистрами) [4, 1, 3] построить отладочную программу, которая имеет дополнительный параметр t и останавливается перед t-ым выполнением очередной команды.

Во второй части описано построение отладочной функции по заданной функции. Отладочная функция имеет дополнительный параметр t и является всюду определенной функцией.

В третьей части показано применение отладочной функции для доказательства нескольких свойств перечислимых множеств.

1. Отладочная программа

Пусть P – заданная программа.

Отладочная программа P_D имеет дополнительный параметр t, и результатом ее выполнения является число 0 или 1. Программа P_D останавливается перед выполнением шага $t+1$ (выполнив t команд) и выдает результат 0. Если программа P закончила работу до этого шага, то выдается результат 1.

Для формализации окончания программы P будем считать, что последней командой программы является команда $M : J(1,1,0)$, а во всех остальных командах перехода $J(m,n,q)$ выполняется условие $1 \le q \le M$.

Программа P_D имеет две исходные переменные x и t и две вспомогательные переменные D и j. Будет также использоваться дополнительная метка K. Для записи программ будем использовать простейший язык, предложенный в [2].

Первые три команды программы P_D:

$$D = 0;$$

$$j = 0;$$

$$\textbf{if } j = t \textbf{ goto } K;$$

Далее идут команды программы P перед каждой из которых добавлены две команды:

$$j = j + 1;$$

$$\textbf{if } j = t \textbf{ goto } K;$$

Вместо последней команды программы P ($M : J(1, 1, 0)$) добавляются две команды:

$$M : D = 1;$$

$$K : J(1, 1, 0)$$

Нетрудно проверить, что программа P_D реализует функцию $D_f(x, t)$.

Итак, программа P_D выдает результат $D = 0$, если программа P не завершила свою работу за t шагов; и результат $D = 1$, если работа завершена менее чем за t шагов.

2. Отладочная функция

Определение 1. *Частично рекурсивная функция $D_f(x, t)$ называется отладочной функцией для частично рекурсивной функции $f(x)$, если*

- *она принимает только два значения 0 и 1;*
- *для любого x она является неубывающей по t;*
- *$D_f(x, t) = 0$ для любого t тогда только тогда, когда $f(x)$ не определена.*

Пусть P – программа, которая реализует функцию $f(x)$. Пусть P_D – отладочная программа для P. Функция $D_f(x, t)$, которая соответствует отладочной программе и возвращает значение D является отладочной функцией.

Нетрудно проверить, что она удовлетворяет определению.

3. Свойства перечислимых множеств

Определение 2. *Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется перечислимым, если оно является областью значений некоторой частично рекурсивной функции.*

Работать с функциями, которые не являются тотальными довольно трудно, поэтому покажем, что условие всюду определенности можно добавить к перечислимым множествам.

Теорема 1. *Пусть A не пустое перечислимое множество, тогда существует тотальная функция $g(x)$, такая, что $A = Ran(g)$.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $A = Ran(f)$, где $f(x)$ – частично рекурсивная функция.

Применим отладочную функцию $D_f(x,t)$, построенную для частично рекурсивной функции $f(x)$.

Построим функцию $G(x,t)$ по следующему алгоритму.

Если $D_f(x,t) = 1$, то $G(x,t) = f(x)$, иначе $G(x,t) = a$.

По построению $A = Ran(G)$. Но функция $G(x,t)$ является функцией от двух переменных. Чтобы получить функцию от одной переменной, применим некоторую частично рекурсивную нумерацию $\pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Пусть $(\phi_1(n), \phi_2(n))$ – обратное отображение к отображению $\pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, тогда $g(x) = G(\phi_1(x), \phi_2(x))$.

По построению функция $g(x)$ является тотальной и частично рекурсивной.

По построению $A = Ran(g)$. Теорема доказана. □

Основным следствием этой теоремы является то, что любое непустое перечислимое множество $A = Ran(g)$ можно задать списком его элементов:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\},$$

где $a_i = g(i)$.

Теорема 2. *Множество A перечислимо тогда и только тогда, когда $A = Dom(f)$, где $f(x)$ – частично рекурсивная функция.*

Доказательство. Пусть множество A перечислимо, тогда полухарактеристическая функция $\Psi_A(x)$ является частично рекурсивной и $A = Dom(\Psi_A)$.

Обратно. Пусть $A = Dom(f)$, где $f(x)$ – частично рекурсивная функция.

Применим отладочную функцию $D_f(x,t)$, построенную для частично рекурсивной функции $f(x)$.

Построим функцию $G(x,t)$ по следующему алгоритму.

Если $D_f(x,t) = 1$, то $G(x,t) = x$, иначе $G(x,t)$ не определена.

По построению функция $G(x,t)$ обладает следующими свойствами.

Если $x \in A$, то существует t такое, что $G(x,t) = x$.

Если $x \notin A$, то $G(x,t)$ не определена для всех t.

По построению $A = Ran(G)$. Но функция $G(x,t)$ является функцией от двух переменных. Чтобы получить функцию от одной переменной применим нумерацию из теоремы 1. Пусть $(\phi_1(n), \phi_2(n))$ – обратное отображение к отображению $\pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, тогда $g(x) = G(\phi_1(x), \phi_2(x))$.

По построению функция $g(x)$ является частично рекурсивной.

По построению $A = Ran(g)$. Теорема доказана. $\square$

Теорема Поста. *Если множества $A, \overline{A}$ перечислимы, то множество A разрешимо.*

Доказательство. Поскольку множества $A, \overline{A}$ перечислимы, то полухарактеристические функции $\Psi_A(x)$, $\Psi_{\overline{A}}(x)$ являются частично рекурсивными.

Применим отладочную функцию.

Пусть $D(x,t)$, $\overline{D}(x,t)$ – отладочные функции для $\Psi_A(x)$, $\Psi_{\overline{A}}(x)$.

Построим функцию $\mathcal{X}_A(x)$ по следующему алгоритму.

for $t = 0, 1, 2, \ldots$
  if $D(x,t) = 1$ $\{\mathcal{X}_A(x) = 1;$ **break**$\}$
  if $\overline{D}(x,t) = 1$ $\{\mathcal{X}_A(x) = 0;$ **break**$\}$

Нетрудно написать этот алгоритм на МНР.

По построению функция $\mathcal{X}_A(x)$ является частично рекурсивной.

Теорема доказана. $\square$

Работа выполнена при поддержке инициативного проекта VIP-016.

Ссылки

[1] *Белов Ю. А., Соколов В. А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2013.

[2] *Верещагин Н. К., Шень А.* Вычислимые функции. М.: МЦНМО, 2012.

[3] *Крупский В. Н., Плиско В. Е.* Теория алгоритмов. М.: Академия, 2006.

[4] *J. C. Shepherdson and H. E. Sturgis.* Computability of recursive functions // J. ACM. 1963. V. 10(2). P. 217–255.

УДК 004.032.26

А. Ю. Ухалов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

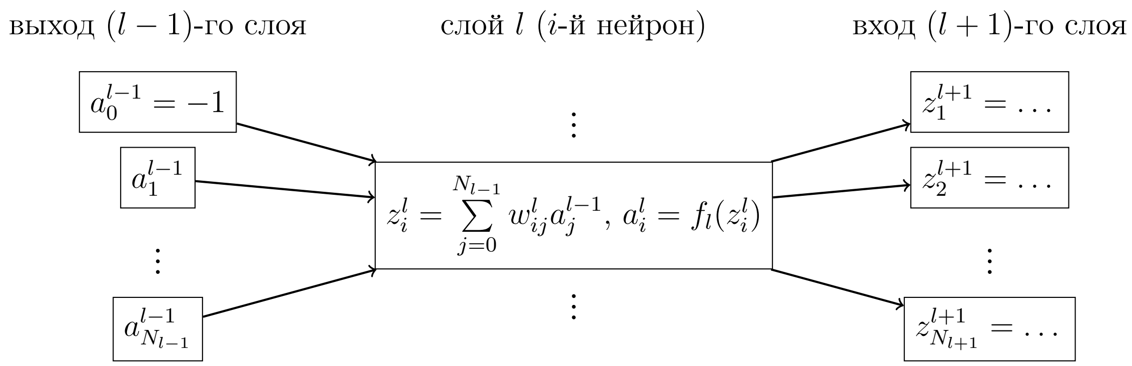
Формулы вычисления градиента в алгоритме обратного распространения ошибки

Приводится вывод расчетных формул для вычисления градиента в алгоритме метода обратного распространения ошибки. Статья представляет собой раздел курса лекций, читаемых автором студентам различных направлений подготовки. Материал может быть включен в различные специальные дисциплины (машинное обучение, информационные технологии, численные методы оптимизации и др.).

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: нейронная сеть, машинное обучение, метод обратного распространения ошибки, градиент.

Рассматривается многослойная нейронная сеть с L слоями. Каждый слой содержит N_l нейронов. Выход каждого нейрона слоя l подается на входы всех нейронов слоя $l+1$. Выходом l-го слоя является вектор $(a_1^l, \ldots, a_{N_l}^l)^T$. На вход 1-го слоя подается вектор $(x_1, \ldots, x_n)^T$. Кроме значений выхода предыдущего слоя, на вход каждого нейрона также подается значение -1, обеспечивающее смещение. Это значение можно условно считать одним из выходов предыдущего слоя, полагая $a_0^l = -1$.



Для единообразия обозначений удобно считать, что в сети имеется нулевой слой, число выходов которого равно $N_0 = n+1$, с выходными значениями $a_0^0 = -1$, $a_1^0 = x_1, \ldots, a_n^0 = x_n$. Вес между j-м узлом $(l-1)$-го слоя и i-м узлом l-го слоя обозначим w_{ij}^l, где $1 \le i \le N_l$, $0 \le j \le N_{l-1}$, $1 \le l \le L$. Вычисление выходов l-го слоя производится по формулам

$$z_i^l = \sum_{j=0}^{N_{l-1}} w_{ij}^l a_j^{l-1}, \qquad a_i^l = f_l(z_i^l). \tag{1}$$

Предполагается, что функция активации $f_l(t)$ одинакова для всех нейронов слоя l. Введем следующие обозначения:

$$W^l := \begin{pmatrix} w_{10}^l & w_{11}^l & \dots & w_{1N_{l-1}}^l \\ w_{20}^l & w_{21}^l & \dots & w_{2N_{l-1}}^l \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{N_l0}^l & w_{N_l1}^l & \dots & w_{N_lN_{l-1}}^l \end{pmatrix}, \quad a^l := \begin{pmatrix} a_1^l \\ a_2^l \\ \vdots \\ a_{N_l}^l \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^l := \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ \vdots \\ a_{N_l}^l \end{pmatrix},$$

$$z^l := \begin{pmatrix} z_1^l \\ z_2^l \\ \vdots \\ z_{N_l}^l \end{pmatrix}, \quad f_l(z^l) := \begin{pmatrix} f_l(z_1^l) \\ f_l(z_2^l) \\ \vdots \\ f_l(z_{N_l}^l) \end{pmatrix}, \quad \hat{f}_l(z^l) := \begin{pmatrix} -1 \\ f_l(z_1^l) \\ \vdots \\ f_l(z_{N_l}^l) \end{pmatrix}.$$

С учетом этих обозначений $z^l = W^l \hat{a}^{l-1}$, $a^l = f_l(z^l)$.

Для обучения сети используется достаточно большой набор векторов $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, которым соотвествуют правильные ответы $y = (y_1, \dots, y_{N_L})^T$. Если матрицы W^l каким-то образом заданы, сеть представляет собой функцию, которая по заданому вектору x строит вектор a^L. Эта функция имеет вид

$$a^L = f_L(W^L \hat{f}_{L-1}(W^{L-1} \hat{f}_{L-2}(\dots \hat{f}_1(W^1 \hat{a}^0)))), \tag{2}$$

где $a_0^0 = -1$, $a_1^0 = x_1, \dots, a_n^0 = x_n$.

В процессе вычисления a^L по данному вектору x оказываются определены все значения z_i^l и a_i^l.

Обучение нейронной сети состоит в подборе весов w_{ij}^l для минимизации функции ошибки

$$Q = \frac{1}{2}\|a^L - y\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N_L}(a_p^L - y_p)^2.$$

Для применения метода градиентного спуска требуется вычислить частные производные $\dfrac{\partial Q}{\partial w_{ij}^l}$. Непосредственное дифференцирование функции Q по формуле (2) оказывается слишком трудоемким. Ниже приводится эффективный способ вычисления градиента функции Q, получивший в литературе (см., например, [1] и [2]) название «метод обратного распространения ошибки».

Ошибкой на L-м слое называется величина

$$\varepsilon^L := \begin{pmatrix} \varepsilon_1^L \\ \vdots \\ \varepsilon_{N_L}^L \end{pmatrix} = a^L - y = \begin{pmatrix} a_1^L \\ \vdots \\ a_{N_L}^L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N_L} \end{pmatrix}.$$

Сначала вычислим производные функции Q по a_p^L. Получим

$$\frac{\partial Q}{\partial a_p^L} = a_p^L - y_p = \varepsilon_p^L, \quad p = 1, \dots, N_L,$$

или в векторном виде

$$\frac{\partial Q}{\partial a^L} = a^L - y = \varepsilon^L.$$

Отметим, что ε^L – вектор ошибки на слое L, т. е. известный вектор.

Из (1) в частности следует, что

$$a_i^L = f_L(z_i^L) = f_L\left(\sum_{j=0}^{N_{L-1}} w_{ij}^L a_j^{L-1}\right), \quad i = 1, \dots, N_L.$$

Это позволяет вычислить производную функции Q по выходам $(L-1)$-го слоя:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_p^{L-1}} = \sum_{i=1}^{N_L} \frac{\partial Q}{\partial a_i^L}\frac{\partial a_i^L}{\partial a_p^{L-1}} = \sum_{i=1}^{N_L} \varepsilon_i^L f_L'(z_i^L) w_{ip}^L = \sum_{i=1}^{N_L} (W^L)_{pi}^T (\varepsilon^L \odot f_L'(z^L))_i =: \varepsilon_p^{L-1},$$

где $p = 1, \dots, N_{L-1}$. Знак $\odot$ обозначает адамарово, т. е. покомпонентное, произведение векторов одинаковой размерности: $(a \odot b)_i = a_i b_i$.

Вектор $\varepsilon^{L-1} = (\varepsilon_1^{L-1}, \dots, \varepsilon_{N_{L-1}}^{L-1})^T$ называют ошибкой на слое $L-1$. Таким образом, вектор ε^{L-1} есть результат умножения матрицы $(W^L)^T$ с удаленной первой строкой на вектор $\varepsilon^L \odot f_L'(z^L)$. Если обозначить через M^L матрицу, которая получается из матрицы $(W^L)^T$ отбрасыванием первой строки, то для ошибки на $(L-1)$-м слое получится формула

$$\varepsilon^{L-1} = \frac{\partial Q}{\partial a^{L-1}} = M^L(\varepsilon^L \odot f_L'(z^L)).$$

Аналогичным образом можно вычислить производные функции Q по выходам произвольного слоя l:

$$\varepsilon^l := \frac{\partial Q}{\partial a^l} = M^{l+1}(\varepsilon^{l+1} \odot f_{l+1}'(z^{l+1})), \quad l = L-1, L-2, \dots, 1,$$

где M^k – матрица, которая получается из матрицы $(W^k)^T$ отбрасыванием первой строки. По аналогии с предыдущим вектор ε^l называется ошибкой на слое l.

Отметим, что значения производных Q по a_0^l также могут быть вычислены, но это не имеет смысла, так как все $a_0^l = -1$.

Используя формулы (1), можно вычислить производные функции Q по переменным w_{ij}^l:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{ij}^l} = \frac{\partial Q}{\partial a_i^l}\frac{\partial a_i^l}{\partial w_{ij}^l} = \varepsilon_i^l f_l'(z_i^l) a_j^{l-1}, \quad 1 \le i \le N_l, \quad 0 \le j \le N_{l-1}, \quad 1 \le l \le L. \tag{3}$$

В векторной записи формула (3) имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial W^l} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^l f_l'(z_1^l) a_0^{l-1} & \ldots & \varepsilon_1^l f_l'(z_1^l) a_{N_{l-1}}^{l-1} \\ \vdots & & \\ \varepsilon_{N_l}^l f_l'(z_{N_l}^l) a_0^{l-1} & \ldots & \varepsilon_{N_l}^l f_l'(z_{N_l}^l) a_{N_{l-1}}^{l-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_1^l f_l'(z_1^l) \\ \vdots \\ \varepsilon_{N_l}^l f_l'(z_{N_l}^l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{l-1} & \ldots & a_{N_{l-1}}^{l-1} \end{pmatrix} = (\varepsilon^l \odot f_l'(z^l)) \otimes (\hat{a}^{l-1})^T.$$

Вычисленные по приведенным формулам градиенты могут использоваться в различных вариантах метода градиентного спуска при обучении нейронной сети.

Представление формул в векторно-матричном виде удобно, так как при разработке программ операции с векторами и матрицами могут быть эффективно реализованы.

Ссылки

[1] *Воронцов К. В.* Математические методы обучения по прецедентам (теория обучения машин). 2011.
URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf

[2] *Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвиль А.* Глубокое обучение. М.: ДМК Пресс, 2018.

УДК 378.14+004

О. П. Якимова, О. В. Власова, Ю. В. Власов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: olga_pavl02@mail.ru
e-mail: vlasova_ov@mail.ru
e-mail: yu_vlasov@mail.ru

От перфокарт до онлайн-курсов и ИИ: как менялось обучение программированию

В статье прослеживается, как изменялось преподавание основ программирования на математическом факультете за последние пятьдесят лет.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: программирование, математический факультет.

Математический факультет отмечает свое пятидесятилетие. Все эти годы на факультете учили думать, решать задачи и писать программы. Мы попробуем проследить эволюцию подходов при обучении программированию. Изменения происходили постепенно, но мы постараемся выделить основные вехи по десятилетиям и сделать акцент на содержании предмета, техническом обеспечении и преподавателях.

70-е годы

Начнем с того, что абитуриенты, поступающие на математический факультет, до начала обучения не знали, что такое ЭВМ и как для нее пишутся программы. Одним из мотивирующих факторов к поступлению было не только глубокое изучение математики, но и то, что программисты работают в белых халатах в просторных светлых залах, а не стоят у станка в течение всего рабочего дня.

Занятия по программированию вели Глеб Дмитриевич Степанов, Вадим Сергеевич Рублёв, Евгений Александрович Тимофеев, Георгий Николаевич Копылов, Наталья Николаевна Суханова и др. Первые свои программы студенты писали на псевдокоде, используя простейшие команды: загрузка данных в ячейку, сложение ячеек, сравнение и др. Изучение программирования начиналось с введения базовых понятий алгоритмизации и изучения простейших процедурных языков типа Алгол-60 (предок языка Pascal), на старших курсах обзорно изучались Кобол и Фортран. Преподаватели использовали традиционные лекции и лабораторные занятия, делая упор на формальное изложение теории и решение алгоритмических задач на доске и в тетради. Изучение основ программирования проходило достаточно долго. Стандартная группа студентов (25 человек) делилась на две-три подгруппы для практических занятий. За семестр надо было сдать всего две лабораторные работы. Почему всего две? Это количество было обусловлено, во-первых, организацией процесса, во-вторых, тем, что работа состояла из нескольких этапов.

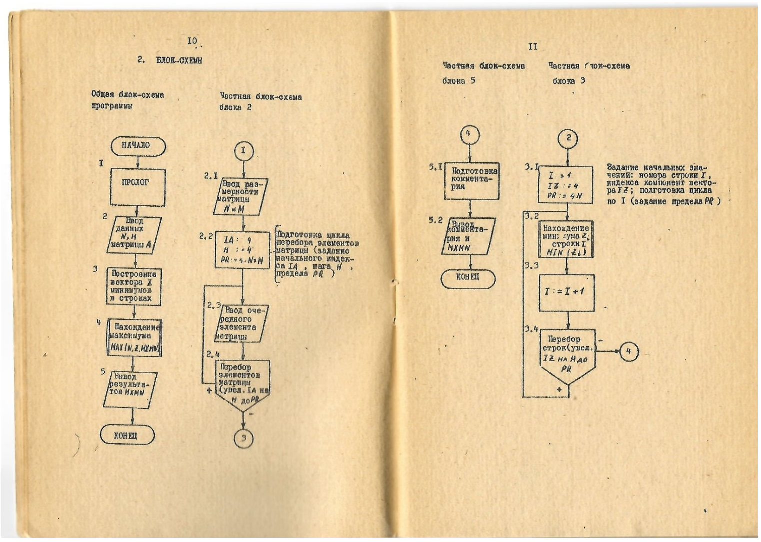


Рис. 1: Блок-схемы [4]

Как же были организованы занятия по программированию? В обычных аудиториях преподаватели объясняли основные структуры языка (присваивание, условие, цикл). Для визуализации структуры программы использовались блок-схемы (см. рис. 1). После разработки алгоритма студент должен был составить полную систему тестов и провести прокрутку. И все это на бумаге. Таким образом, обучение включало глубокое понимание принципов программирования и развитие способности мыслить структурированно и логически. Вторым этапом был запуск написанной программы на ЭВМ.

В первом корпусе университета находился вычислительный центр (ВЦ), в котором был размещены все компьютерные ресурсы университета. Сначала это были ЭВМ «Наири-К» и «Одра-1204», а позднее — ЕС ЭВМ. «Наири» и «Одра» относились ко второму поколению ЭВМ и были построены исключительно на полупроводниковых элементах. Каждое утро на ВЦ начиналось с загрузки операторами ЭВМ «Одра». Загрузка проходила с перфолент, а так как они очень быстро выходили из строя, постоянно требовалось их копирование. Обе машины использовались как для обработки большого спектра математических расчетов, применяемых в научной работе, так и для обучения студентов.

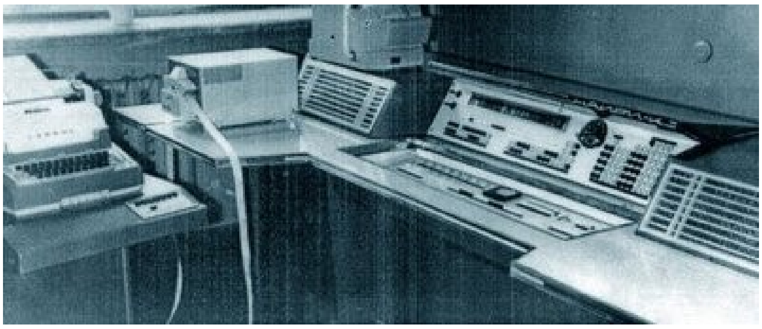


Рис. 2: Электронно-вычислительная машина Наири-К

ЭВМ «Наири-К» использовалась студентами в основном во время летней практики. Для ввода текста программы применялась печатная машинка. Если студент в процессе набора делал ошибку, то весь код приходилось печатать заново. Введенная программа сохранялась на перфоленте, и с нее код запускался на ЭВМ, а затем распечатывались результаты. Некоторые продвинутые студенты могли читать текст программы непосредственно с перфоленты.

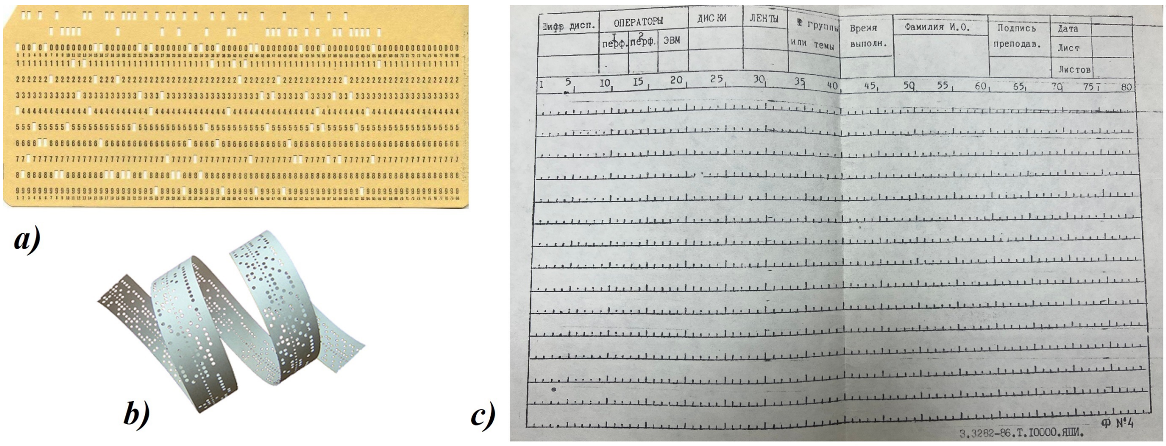
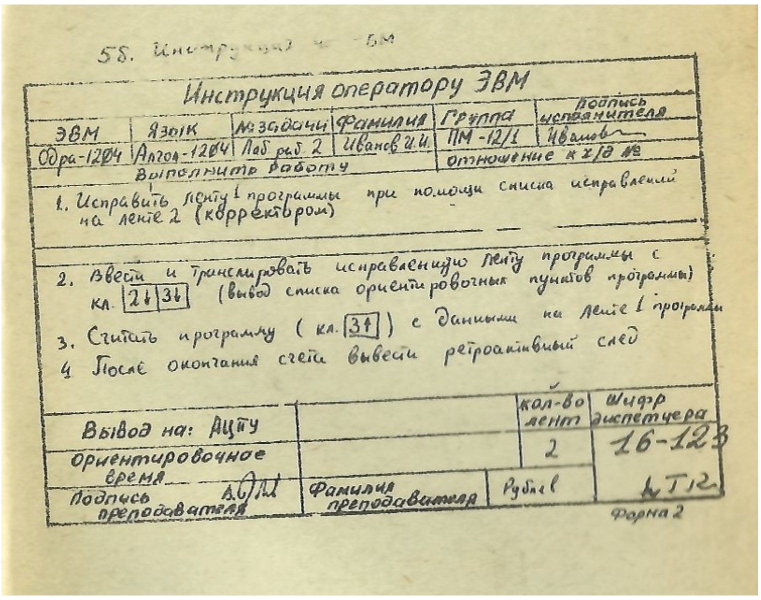


Рис. 3: a) Перфокарта. b) Перфолента. c) Бланк-«полосатик»

Работа на ЭВМ «Одра-1204» происходила иначе. Текст программы писался печатными буквами на специальных бланках-«полосатиках» (см. рис. 3). В каждой подгруппе выбирался староста, чьей задачей было относить работы студентов на ВЦ в первый корпус, а также приносить листинги с результатами вычислений обратно. На ВЦ оператор переносил текст программы с «полосатиков» на перфокарты (перфоленты) и запускал программу в пакетном режиме. На выходе студент получал перфоленту с текстом программы и исходными данными, а также результаты вычислений, напечатанные на бумаге. Иногда этот процесс мог занимать не одну неделю. На рис. 4 приведена инструкция для оператора ЭВМ из методических указаний [1].

Преподаватели также использовали технику в своих научных расчетах. На одном из бланков, сданных для обработки на ВЦ, можно было увидеть такой текст: «Примерное время работы программы — 6 часов 30 минут».



Инструкция оператору ЭВМ

ЭВМ	Язык	№ задачи	Фамилия	Группа	Подпись исполнителя
Одра-1204	Алгол-1204	Лаб раб. 2	Иванов И.И.	ПМ-12/1	Иванов

Отношение к х/д №

Выполнить работу

1. Исправить ленту 1 программы при помощи списка исправлений на ленте 2 (корректором)
2. Ввести и транслировать исправленную ленту программы с кл. $\boxed{2\downarrow}\boxed{3\downarrow}$ (вывод списка ориентировочных пунктов программы)
3. Считать программу (кл. $\boxed{3\uparrow}$) с данными на ленте 1 программы
4. После окончания счета вывести ретроактивный след

		Кол-во лент	Шифр диспетчера
Вывод на: АЦПУ			
Ориентировочное время		2	16-123
Подпись преподавателя	Фамилия преподавателя	Рублев	

Форма 2

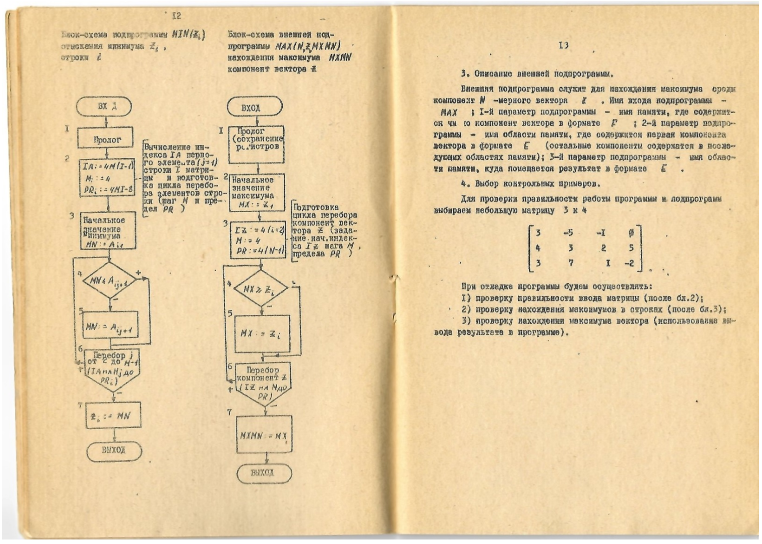
Рис. 4: Инструкция для оператора ЭВМ [1]

80-е годы

Основной вычислительный ресурс этого периода — ЕС ЭВМ — по-прежнему располагался на ВЦ в первом корпусе университета. Процесс запуска программ практически не изменился: студенты писали код на «полосатиках», старосты относили их на ВЦ и позже получали листинги. Иногда студенты получали целые рулоны бумаги с результатами обработки. Задачей студента было проанализировать полученный листинг и в случае ошибки указать, какую строчку программы удалить, в какой — исправить символ и т. п. Для студентов вводились ограничения по количеству выходов на исполнение программ. Если не удавалось отладить свой код за указанное преподавателем количество выходов на машину, то было необходимо подойти к преподавателю, показать программу, ответить на вопросы, проанализировать пограничные случаи, сделать прокрутку тестов, и только потом добавлялись выходы. Все это приучало тщательно продумывать алгоритм решения до запуска на машине и формировало критическое мышление. Но иногда это же служило причиной отчисления студента.

Первый семестр первого курса был посвящен изучению языка высокого уровня — PL-1. Задачи, которые решались на занятиях, прежде всего касались обработки последовательностей чисел, одномерных, а затем двумерных массивов. Вторая лабораторная работа была посвящена использованию подпрограмм в задаче на обработку двумерного массива; сейчас это шестая лабораторная работа у КБ(ИБ)-11 [2, 3].

Во втором семестре изучался язык Ассемблер для ЕС ЭВМ и также выполнялись лабораторные работы [4, 5]. Итогом обучения на первом курсе был экзамен, на котором за ограниченное время на бумаге необходимо было решить несколько задач. Для закрепления изученного материала в летне-осенний период проводи-



12

Блок-схема подпрограммы $MIN(Z_i)$ отыскания минимума Z_i, строки i

ВХОД

1 Пролог

2 $IA:=4M(I-1)$ $M_i:=4$ $PR_i:=4MI-8$ — Вычисление индекса IA первого элемента ($j=1$) строки I матрицы и подготовка цикла перебора элементов строки (шаг M и предел PR)

3 Начальное значение минимума $MN:=A_{i1}$

4 $MN \leq A_{ij+1}$ + −

5 $MN:=A_{ij+1}$

6 Перебор j от 2 до $M-1$ (IA на M_j до PR_i) + −

7 $Z_i:=MN$

ВЫХОД

Блок-схема внешней подпрограммы $MAX(N,Z,MXMN)$ нахождения максимума $MXMN$ компонент вектора Z

ВХОД

1 Пролог (сохранение регистров

2 Начальное значение максимума $MX:=Z_1$

3 $IZ:=4(i=2)$ $M:=4$ $PR:=4(N-1)$ — Подготовка цикла перебора компонент вектора Z (задание нач. индекса IZ шага M, предела PR)

4 $MX \geq Z_i$ + −

5 $MX:=Z_i$

6 Перебор компонент Z (IZ на M до PR) + −

7 $MXMN:=MX$

ВЫХОД

13

3. Описание внешней подпрограммы.

Внешняя подпрограмма служит для нахождения максимума среди компонент N-мерного вектора Z. Имя входа подпрограммы – MAX; 1-й параметр подпрограммы – имя памяти, где содержится число компонент вектора в формате F; 2-й параметр подпрограммы – имя области памяти, где содержится первая компонента вектора в формате E (остальные компоненты содержатся в последующих областях памяти); 3-й параметр подпрограммы – имя области памяти, куда помещается результат в формате E.

4. Выбор контрольных примеров.

Для проверки правильности работы программы и подпрограмм выбираем небольшую матрицу 3 х 4

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

При отладке программы будем осуществлять:
1) проверку правильности ввода матрицы (после бл.2);
2) проверку нахождения максимумов в строках (после бл.3);
3) проверку нахождения максимума вектора (использование вывода результата в программе).

Рис. 5: Блок-схема подпрограммы [4]

лась вычислительная практика, в рамках которой студенты получали возможность самим поработать на вычислительном центре в качестве операторов ЭВМ и программистов. Практика шла две недели по шесть часов в день в две смены.

Лекции по программированию читали Глеб Дмитриевич Степанов, Вадим Сергеевич Рублёв. Лабораторные занятия вели: Владимир Григорьевич Фокин, Николай Борисович Федотов, Людмила Георгиевна Акулова, Надежда Борисовна Мозенкова (Чаплыгина), Юрий Викторович Русин и др. Некоторые из них являлись выпускниками математического факультета.

Рис. 6: Студент 5 курса специальности «Прикладная математика» А. Виноградов. В центре — микро-ЭВМ «Электроника-60». Ауд. 113а, 2-й корпус. 1985 г.

Рис. 7: Студенты около мини-ЭВМ «Электроника-60». Справа — Д. Розенсон. Ауд. 113а, 2-й корпус. 1985 г.

В середине 80-х гг. начался переход от использования «больших» ЭВМ с объемом оперативной памяти 512 Кб (килобайт!!!) к мини- и микро-ЭВМ, а затем — к персональным компьютерам. Во втором учебном корпусе, где тогда располагался математический факультет, появилась своя факультетская вычислительная техника — две микро-ЭВМ «Электроника-60» (см. рис. 6). Размер оперативной памяти этой машины был 56 килобайт. Вся ЭВМ в составе: процессор, память, накопители на гибких дисках размером 8 дюймов, интерфейсные модули для подключения внешних устройств — помещались в небольшой стойке. А в первом корпусе была установлена аналогичная по архитектуре мини-ЭВМ «Электроника-100» с оперативной памятью 248 Кб. Управление этими ЭВМ, запуск программ и вывод результатов выполнялись с помощью дисплея и клавиатуры.

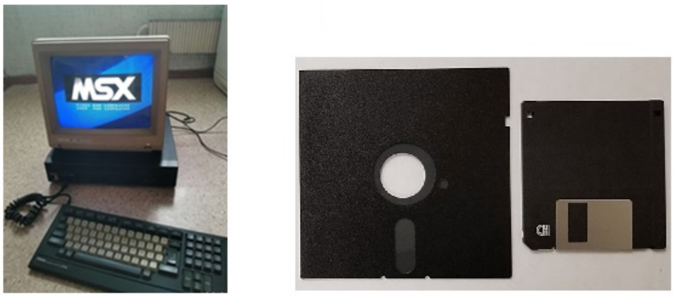
«Электроника-60» была установлена в аудитории 113а и планировалась для внедрения и эксплуатации обучающей системы «Наставник». Руководил данным направлением В. С. Рублёв. Основную часть «Наставника» должна была составлять подсистема тестирования, которую разрабатывали студенты в рамках дипломных работ. Частью этого проекта должна была также стать разработка собственной операционной системы, позволявшей подключать к микро-ЭВМ до 6 дисплеев (рабочих мест студентов), и менее ресурсоемкой по сравнению со штатной ОС РАФОС. Прототип этой ОС был разработан дипломником В. С. Рублёва Дмитрием Розенсоном. Ещё одной особенностью этих машин было то, что они не умели форматировать дискеты, приходилось это делать в других организациях.

Рис. 8: Ю. В. Власов за компьютером «Правец 8»(аналог ПК «Apple II») с 8-битным процессором «Motorolla-6502». 1986 г.

90-е годы

Факультет переехал в 7-й корпус. В корпусе начал работать филиал ВЦ. Появились несколько классов с персональными компьютерами — класс «Yamaha», класс «Искра-1030» (советский аналог IBM PC). Персональный компьютер «Yamaha» с операционной системой MSX DOS содержал в себе 3 процессора: арифметический, графический и звуковой (см. рис. 9a). Все компьютеры в классе были объединены в сеть. Компьютер преподавателя отличался тем, что имел цветной монитор (у студентов мониторы были монохромные) и дисковод для дискет 3,5 дюйма. Студенты в начале занятия загружали по сети с компьютера преподавателя свои программы, а в конце занятия сохраняли их также по сети. При этом продолжала использоваться машина семейства ЕС ЭВМ, но не в пакетном, а в интерактивном режиме с использованием удаленных терминалов. Ушли в прошлое ограничения по запуску программ, а исходные тесты программ студенты хранили на собственных дискетах, сначала пятидюймовых, а потом трехдюймовых (см. Рис. 9b).

Практические занятия стали проходить в компьютерных классах. Студенты получили прямой доступ к компьютерной технике. Изменились и языки программирования: Pascal, C. Ассемблер использовался как язык для изучения архитекту-



a) b)

Рис. 9: a) Компьютер «Yamaha». b) Дискеты 5,25” и 3,5”

ры ПК. Стали доступны среды разработки Turbo Pascal, Borland C, они помогают студентам более глубоко и быстро изучать основы программирования. Увеличилось количество лабораторных работ, выполняемых за семестр. Как и раньше, были задачи на обработку последовательностей чисел, одномерных и двумерных массивов, геометрические задачи. Появились задачи на обработку текстов, файловый ввод-вывод.

Рис. 10: О. В. Кочикова (Власова) за персональным компьютером «Правец 16» (аналог IBM PC). Ауд. 314, 7-й корпус. 1990 г.

Лекции и практику по программированию вели Вадим Сергеевич Рублёв, Юрий Владимирович Власов, Надежда Борисовна Чаплыгина, Лариса Юрьевна Белова, Николай Борисович Федотов, Ольга Владимировна Власова и др. Разработано множество учебных пособий и методических указаний для студентов, применяемых при выполнении лабораторных работ [6, 7].

Рис. 11: Студентка ПМИ-4 Наталья Протасова за персональным компьютером «Искра-1030». Ауд. 441, 7-й корпус. 1991 г.

2000-е годы

На факультете было развернуто несколько классов с персональными компьютерами, объединенными в сеть, с выходом в сеть Интернет. Персональные компьютеры дома есть лишь у части студентов, поэтому основная учебная работа выполняется в компьютерных классах университета. Для хранения информации стали использоваться флеш-накопители с интерфейсом USB.

Вновь изменились языки программирования: C++ и C#. Появились многофункциональные среды разработки — IDE, в частности MS Visual Studio. К сожалению, вместо обдумывания алгоритма и прокрутки его на бумаге, студентами для поиска решения стал применяться метод многократного запуска кода на персональном компьютере с отладочной печатью, а потом и с пошаговым выполнением, что снизило уровень аналитического мышления при написании программы. Зачастую студенты стали применять следующую тактику: «Поменяю вот эту строчку, а вдруг пройдет». Содержание предмета устоялось, 6–7 лабораторных работ за семестр. При изучении геометрических задач обязательным стало применение графики для отображения решения на экране. Добавлены лабораторные работы на использование различных контейнеров и основ ООП [8]–[11].

Лекции и практику по программированию вели Надежда Борисовна Чаплыгина, Лариса Юрьевна Белова, Ольга Павловна Якимова, Ольга Владимировна Власова, Николай Борисович Федотов, Андрей Евгеньевич Харьков и др.

2010-е годы

Техническая сторона обучения с конца 2000-х гг. не изменялась: на факультете развернуто достаточное количество компьютерных классов. Также практически не изменялись языки программирования и среды разработки, только произошел отказ от языка Ассемблер на всех направлениях, кроме компьютерной (информационной) безопасности. Содержание и последовательность лабораторных работ менялись незначительно, добавлены лабораторные работы по использованию динамического программирования и жадных алгоритмов [12] – [15]. Многие пер-

Рис. 12: О. П. Якимова на практическом занятии по методам программирования у КБ-31. Ауд. 403, 7-й корпус. Октябрь 2013 г.

вокурсники начинают изучать основы программирования уже в школе и даже сдают ЕГЭ по информатике. Но большинство поступавших на математический факультет относится к группе выпускников, имеющих 61–80 баллов по информатике, и, как показывает практика, не может написать с нуля несложную программу. Отсюда перед преподавателем стоят задачи: формирования алгоритмического мышления — раз, обучения синтаксису языка программирования — два, привития навыка анализа кода — три. С 2016/17 учебного года в преподавание были внедрены турниры по программированию на платформе Яндекс-контест. Это позволило увеличить число решаемых задач, чтобы количество перешло в качество и у студентов сформировался необходимый навык. При этом преподаватель также лично проверял код лабораторных работ в классах, что позволяло оценить самостоятельность при решении задач.

Лекции и практику по программированию вели Ольга Владимировна Власова, Ольга Павловна Якимова, Наталья Петровна Федотова, Николай Борисович Федотов, Надежда Дмитриевна Елисеева и др.

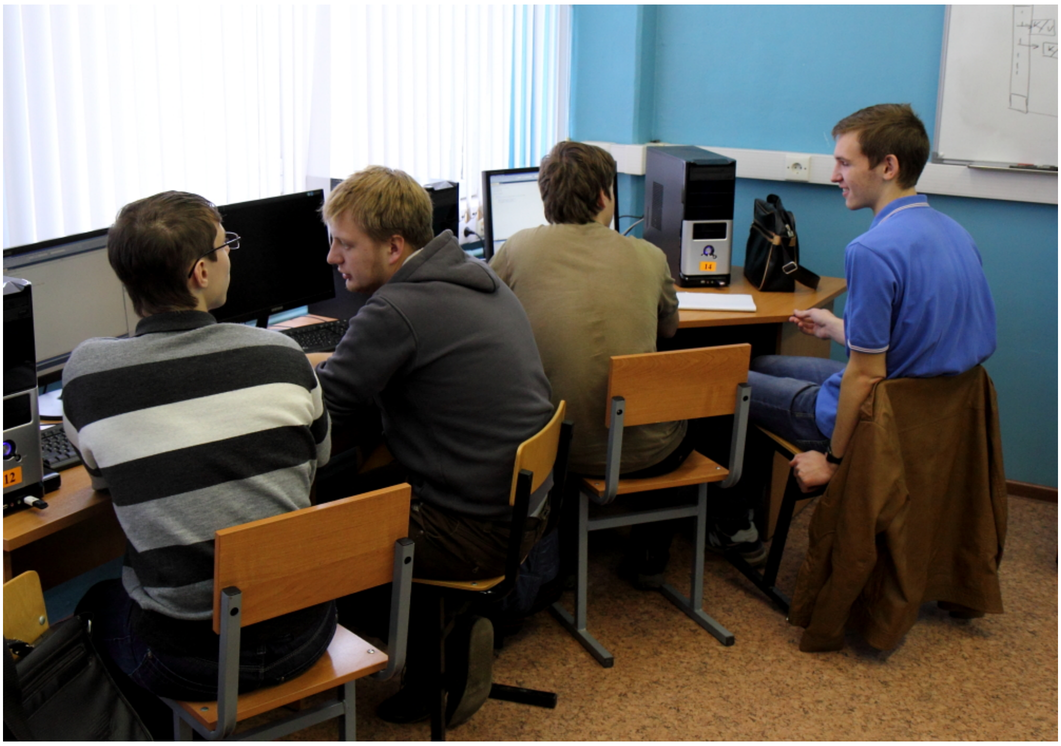


Рис. 13: Студенты КБ-31 на практическом занятии по методам программирования. Ауд. 403, 7-й корпус. Октябрь 2013 г.

Рис. 14: Преподаватели кафедры КБ и ММОИ О. В. Власова, О. П. Якимова, Л. Ю. Белова, Н. Б. Федотов. Ноябрь 2013 г.

2020-е годы

На данный момент компьютерный парк математического факультета — около 200 современных персональных компьютеров и ноутбуков. В каждой аудитории есть ноутбук с проектором. Издано достаточное количество учебных пособий (например, [16, 17]). Это обеспечивает более высокий уровень проведения лекционных и практических занятий.

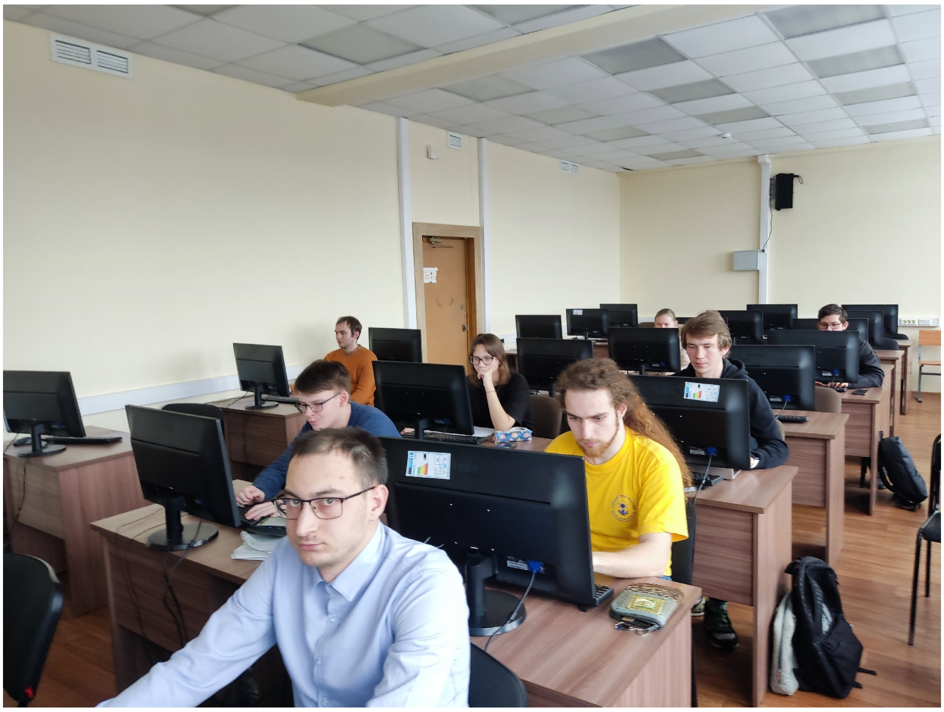


Рис. 15: Студенты КБ-31 на занятиях. Ауд. 403, 7-й корпус. Март 2025 г.

Начало этого десятилетия пришлось на эпидемию ковида и переход на дистанционное обучение. Другим фактором, оказавшим влияние на преподавание основ программирования, стала сдача ЕГЭ по информатике в компьютерной форме. Выпускник школы нацелен на получение максимального количества баллов за минимальное количество усилий. Многие задачи ЕГЭ элементарно решаются с использованием шаблонов. Отсюда в школах произошел отказ от строго типизированных языков программирования в пользу языка с неявной типизацией Python. Как следствие, понятие типа данных, его внутреннего представления у школьника не сформировано. Программирование воспринимается, как поиск в сети магической строчки для решения задачи без осознания работы алгоритма. Поэтому преподавателю на первом курсе приходится прикладывать массу усилий для преодоления косности мышления. И наконец, широкое распространение инструментов искусственного интеллекта снижает мотивацию студентов к обучению и увеличивает нагрузку на преподавателя. В последнее время часть откровенно слабых студентов стала сдавать задачи контеста с первого раза, в том числе и задачи повышенного уровня сложности. При этом либо лабораторные работы у них не сданы, либо код написан, но объяснить его суть преподавателю они не могут.

Мы кратко проследили путь, пройденный за последние полвека математическим факультетом в обучении студентов основам программирования. Несмотря на достигнутый прогресс в техническом оснащении, задача преподавателей остается сложной. Учитывая стремительное развитие индустрии ИТ-технологий, необходимо поддерживать баланс между глубокими теоретическими знаниями и практической подготовленностью выпускников, мотивировать студентов и вести их за собой.

Ссылки

[1] *Рублёв В. С., Соколов В. А., Степанов Г. Д.* Лабораторный практикум на ЭВМ. Практикум на Алголе. Часть 1: метод. указания. Ярославль: ЯрГУ, 1979.

[2] *Рублёв В. С.* Лабораторный практикум на ЭВМ. Программирование на PL/1. Ярославль: ЯрГУ, 1982.

[3] Методика и языки разработки алгоритма / Сост. В. С. Рублёв, Н. Б. Федотов. Ярославль: ЯрГУ, 1988. 32 с.

[4] *Рублёв В. С.* Лабораторный практикум на ЭВМ. Программирование подпрограмм на Ассемблере. Ярославль: ЯрГУ, 1982.

[5] *Белов Ю. А., Белова Л. Ю.* Практикум по спецкурсу «Алгоритмические языки и методы трансляции». Ярославль: ЯрГУ, 1989. 91 с.

[6] Практикум на ЭВМ (варианты заданий): метод. указания / Сост. Ю. В. Власов, С. Д. Глызин. Ярославль: ЯрГУ. 1996. 20 с.

[7] Лабораторные работы по курсу «ЭВМ и программирование»: метод. указания / сост. Л. Ю. Белова, Ю. В. Власов, О. В. Власова. Ярославль: ЯрГУ, 2001. 19 с.

[8] Информатика: метод. указания по курсу / Сост. Н. Б. Федотов. Ярославль: ЯрГУ, 2003. 12 с.

[9] Командный файл MS DOS: метод. указания лабораторного практикума на ЭВМ по курсу «Информатика» (4 семестр) / Сост. В. С. Рублёв. Ярославль: ЯрГУ. 2003. 15 с.

[10] Информатика: лабораторный практикум / сост.: О. В. Власова, О. П. Полякова. Ярославль: ЯрГУ, 2005. 48 с.

[11] Связь разноязыковых модулей: лабораторный практикум на ЭВМ: метод. указания / сост. О. В. Власова, Н. Б. Чаплыгина. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 40 с.

[12] *Лаврентьев И. В., Никулин В. А., Чаплыгина Н. Б.* Средства отладки в Visual C++: метод. указания. Ярославль: ЯрГУ, 2010. 51 с.

[13] *Якимова О. П.* Языки программирования. Ч. 1: лабораторный практикум. Ярославль: ЯрГУ, 2010. 68 с.

[14] *Федотов Н. Б.* Практикум на ЭВМ. Ассемблер: метод. указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011. 68 с.

[15] *Якимова О. П., Якимов И. М., Дольников В. Л.* Языки программирования. Ч. 2: лабораторный практикум. Ярославль: ЯрГУ, 2012. 56 с.

[16] *Власова О. В., Федотова Н. П., Якимова О. П.* Основы программирования: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2019. 84 с.

[17] *Власова О. В., Федотова Н. П., Якимова О. П.* Основы программирования: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2021. 72 с.

Фотографии

Фото 1. Сотрудники математического факультета. Февраль 2026 г.

Фото 1. Сотрудники математического факультета

Первый ряд, слева направо:

Ольга Павловна Якимова, доцент кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации, кандидат физико-математических наук, доцент;

Елена Владимировна Житенёва, ассистент кафедры общей математики;

Анастасия Михайловна Ковалёва, старший преподаватель кафедры математического моделирования;

Наталья Сергеевна Красавина, ведущий специалист деканата;

Надежда Дмитриевна Быкова, доцент кафедры математического моделирования, кандидат физико-математических наук, доцент.

Второй ряд:

Даниил Алексеевич Большаков, ассистент кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации;

Ирина Ивановна Безуглова, ассистент кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации;

Ольга Владимировна Власова, старший преподаватель кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации;

Владимир Евгеньевич Балабаев, профессор кафедры математического анализа, доктор физико-математических наук, профессор;

Владимир Викторович Литвинов, доцент кафедры математического анализа, кандидат технических наук, доцент;

Павел Николаевич Нестеров, декан математического факультета, заведующий кафедрой нелинейной динамики, доктор физико-математических наук, доцент;

Евгений Иванович Бережной, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, доктор физико-математических наук, профессор;

Валерий Георгиевич Дурнев, профессор кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации, доктор физико-математических наук, профессор;

Наталия Львовна Майорова, доцент кафедры математического моделирования, кандидат педагогических наук, доцент;

Евгений Павлович Кубышкин, профессор кафедры математического моделирования, доктор физико-математических наук, профессор.

Третий ряд:

Кирилл Андреевич Корнев, ассистент кафедры алгебры и математической логики;

Дмитрий Анатольевич Куликов, доцент кафедры дифференциальных уравнений, кандидат физико-математических наук, доцент;

Дмитрий Алексанрович Савинов, старший преподаватель кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации;

Светлана Ивановна Яблокова, доцент кафедры алгебры и математической логики, кандидат физико-математических наук, доцент;

Анатолий Николаевич Куликов, профессор кафедры дифференциальных уравнений, доктор физико-математических наук, доцент;

Максим Сергеевич Лезин, доцент кафедры дифференциальных уравнений;

Сергей Александрович Кащенко, профессор кафедры математического моделирования, директор Объединенного института математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова, доктор физико-математических наук, профессор;

Александра Андреевна Кащенко, доцент кафедры математического анализа, кандидат физико-математических наук, доцент;

Наталья Юрьевна Колбнева, доцент кафедры общей математики, кандидат физико-математических наук.

Четвёртый ряд:

Вера Константиновна Воронцова, ассистент кафедры математического анализа;

Анна Олеговна Толбей, доцент кафедры компьютерных сетей, кандидат физико-математических наук, доцент;

Сергей Дмитриевич Глызин, заведующий кафедрой компьютерных сетей, доктор физико-математических наук, профессор;

Михаил Юрьевич Смирнов, ассистент кафедры математического анализа;

Михаил Викторович Невский, заведующий кафедрой математического анализа, доктор физико-математических наук, доцент;

Лев Сергеевич Казарин, профессор кафедры алгебры и математической логики, доктор физико-математических наук, профессор;

Надежда Владимировна Тимофеева, заведующая кафедрой алгебры и математической логики, доктор физико-математических наук, доцент;

Елена Вячеславовна Никулина, доцент кафедры общей математики, кандидат педагогических наук, доцент;

Елена Александровна Марушкина, заведующая кафедрой общей математики, кандидат физико-математических наук, доцент.

Пятый ряд:

Дмитрий Олегович Логинов, доцент кафедры математического моделирования, кандидат физико-математических наук;

Алексей Юрьевич Ухалов, доцент кафедры математического анализа, кандидат физико-математических наук, доцент;

Валентина Викторовна Яцук, документовед кафедры алгебры и математической логики;

Илья Вячеславович Котов, доцент кафедры дифференциальных уравнений;

Илья Дмитриевич Семакин, ассистент кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации;

Виталий Олегович Бурганов, доцент кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации;

Сергей Александрович Игонин, доцент кафедры нелинейной динамики, кандидат физико-математических наук;

Виталий Михайлович Щербань, старший преподаватель кафедры общей математики;

Дмитрий Сергеевич Костерин, старший преподаватель кафедры математического моделирования.

Фото 2. Ветераны математического факультета. Февраль 2026 г.

Фото 2. Ветераны математического факультета

Первый ряд, слева направо:

Наталия Львовна Майорова, Сергей Александрович Кащенко, Сергей Дмитриевич Глызин.

Второй ряд:

Владимир Евгеньевич Балабаев, Анатолий Николаевич Куликов, Евгений Павлович Кубышкин.

Третий ряд:

Евгений Иванович Бережной, Михаил Викторович Невский, Светлана Ивановна Яблокова, Лев Сергеевич Казарин, Валерий Георгиевич Дурнев.

Четвёртый ряд:

Ольга Павловна Якимова, Алексей Юрьевич Ухалов, Владимир Викторович Литвинов, Ольга Владимировна Власова.

Фото 3. Деканы математического факультета. Февраль 2026 г.

Фото 3. Деканы математического факультета

Первый ряд, слева направо:
Михаил Викторович Невский, Павел Николаевич Нестеров.

Второй ряд:
Евгений Иванович Бережной, Лев Сергеевич Казарин, Валерий Георгиевич Дурнев.

Научное издание

Математика и компьютерные науки в классическом университете

Материалы конференции

10-я научная конференция
(5–6 июня 2026 г., Ярославль)

Компьютерный набор — авторы
Редактор М. В. Невский
Компьютерная вёрстка — М. В. Невский, А. Ю. Ухалов

Подписано в печать 16.03.2026. Формат 60×84 1/8.
Усл. печ. л. 15,4. Уч.-изд. л. 9,0.
Тираж 60 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен на математическом факультете ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14

Отпечатано ООО «Канцлер».
150008, г. Ярославль, ул. Клубная, 4–49.
Тел. (4852) 58-76-33, 58-76-37.