Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агенство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

В.С. Климов, Т.Г. Бычкова, А.Ю. Ухалов

Конечномерная оптимизация

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
010100 Математика

Ярославль 2008

УДК 51:37
ББК В 183.4я73
К49

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета в качестве учебного издания.
План 2008 года.

Рецензенты:
Кафедра теории и методики обучения информатике ЯГПУ им. К. Д. Ушинского;
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики и вычислительной техники ЯГТУ Д.О. Бытев.

К49 **Климов, В.С.** Конечномерная оптимизация: Учебное пособие/ В.С. Климов, Т.Г. Бычкова, А.Ю. Ухалов; Яросл. гос. ун-т. — Ярославль: ЯрГУ, 2008. — 96 с.
ISBN 978-5-8397-0594-4

Пособие «Конечномерная оптимизация» содержит следующие разделы дисциплины «Методы оптимизации и вариационное исчисление»: нелинейная оптимизация, линейная оптимизация, численные методы оптимизации. Предназначено для студентов университетов, обучающихся по специальности 010100 Математика (дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации», блок ОПД), очной формы обучения. Большая часть пособия может быть полезной и для студентов университетов, обучающихся по специальности 010200 Прикладная математика и информатика.
Пособие подготовлено с использованием издательской системы LaTeX.
Рис. 11. Библиогр.: 19 назв.

ISBN 978-5-8397-0594-4

УДК 51:37
ББК В 183.4я73

Оглавление

Предисловие

Представленный в пособии материал разбит на четыре главы. Первая глава посвящена условиям оптимальности для конечномерных экстремальных задач. Вначале рассматриваются задачи на безусловный экстремум. Далее выводится правило множителей Лагранжа для задачи с ограничениями типа равенств и неравенств. Специфические проблемы выпуклого анализа и выпуклой оптимизации составляют содержание двух последующих параграфов. Определённое внимание уделяется восходящим по своей постановке к П.Л. Чебышёву задачам на минимакс, недостаточно, по мнению авторов, представленным в учебной литературе.

Вторая глава «Линейная оптимизация» содержит теорию линейного программирования. Доказываются теоремы о разрешимости линейных оптимизационных задач и теоремы двойственности; особое место занимают анализ крайних точек многогранников и выяснение их роли в линейной оптимизации. Завершает главу в достаточной мере традиционное изложение метода последовательного улучшения плана.

В третьей главе обсуждаются численные методы оптимизации. Здесь рассматриваются методы безусловной оптимизации (метод градиентного спуска и его модификации), а также вопросы оптимизации при наличии ограничений (метод штрафных функций, условного градиента, проекции градиента и т. п.).

Последняя (четвертая) глава посвящена вопросам использования специальных программ для решения оптимизационных задач. Эта область бурно развивается, поэтому главу следует рассматривать лишь как краткое введение в данную тематику.

Основные разделы пособия обсуждались с рядом математиков. Авторы выражают своим коллегам искренную признательность за оказанную помощь. Будем благодарны за указания на возможные ошибки в тексте, ответственность за которые авторы полностью берут на себя.

Климов В.С., доктор физико-математических наук,
Бычкова Т.Г., кандидат физико-математических наук,
Ухалов А.Ю., кандидат физико-математических наук.

Глава 1

Нелинейная оптимизация

1.1 Задачи на безусловный экстремум

1. Предварительные сведения. Ниже $\mathbb{R}^n$ совокупность вектор-столбцов $x = (x_1 \dots x_n)^T$, где $x_1, \dots, x_n$ – действительные числа, называемые компонентами вектор-столбца x, T – оператор транспонирования, сопоставляющий вектор-строке $(x_1 \dots x_n)$ вектор-столбец

$$(x_1 \dots x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Стандартным образом в $\mathbb{R}^n$ вводятся линейные операции и скалярное произведение (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}^n$: если $x = (x_1 \dots x_n)^T$, $y = (y_1 \dots y_n)^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$x + y = (x_1 + y_1 \dots x_n + y_n)^T,\ \lambda x = (\lambda x_1 \dots \lambda x_n)^T,\ (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ длина (модуль) вектора x определяется равенством $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Справедливы соотношения

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|,\ \ |x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

первое из которых называют неравенством Коши, второе – неравенством треугольника. Данные неравенства имеют прозрачный геометрический смысл и очевидны в буквальном смысле этого слова. Если $a \in \mathbb{R}^n$, $\rho \geq 0$, то множества $B(a, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x - a| \leq \rho\}$, $U(a, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x - a| < \rho\}$ именуют замкнутым (открытым) шаром радиуса ρ с центром в точке a. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называют ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

Точку x_0 именуют внутренней точкой множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если справедливо включение $B(x_0, \rho) \subset E$ при некотором $\rho > 0$. Совокупность внутренних точек множества E обозначают символом $\overset{\circ}{E}$. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют открытым, если каждая его точка является внутренней, т. е. $\overset{\circ}{E} = E$. Например, множества

$U(a,\rho)$, $\mathbb{R}^n$ открыты, шар $B(a,\rho)$ таковым не является. Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто, если дополнение к нему $CF := \mathbb{R}^n \setminus F$ открыто. Справедлив следующий критерий замкнутости: множество F замкнуто, если предел всякой сходящейся последовательности элементов из F принадлежит множеству F.

Первостепенную роль в задачах оптимизации играют компактные множества. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют компактным, если из всякой последовательности его элементов можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из E. Имеет место следующий критерий компактности.

Предложение 1. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно в том и только в том случае, если E ограничено и замкнуто.*

Систему множеств называют центрированной, если любая её подсистема имеет непустое пересечение.

Предложение 2. *Замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно в том и только в том случае, когда любая центрированая система замкнутых подмножеств множества E имеет непустое пересечение.*

Приведённые выше сведения хорошо известны (см., например [1], [4], [9], [14]). Наша цель заключалась не в разъяснении известных понятий, а в фиксации обозначений и терминологии.

2. Постановка задачи. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – действительная функция на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Задача о минимизации функции f на множестве X записывается в виде

$$f(x) \to \min, \quad x \in X\,. \tag{1}$$

При этом f называют целевой функцией, X – допустимым множеством, любой элемент x из X - допустимой точкой задачи (1).

Элемент $\widehat{x}$ из X именуют решением задачи (1), если $f(x) \geqslant f(\widehat{x})$ для всех x из X. В этом случае говорят, что $\widehat{x}$ реализует абсолютный минимум функции f (или $\widehat{x}$ – точка глобального минимума f). Необходимым условием существования решения задачи (1) является ограниченность снизу функции f, т. е. конечность числа $\inf\{f(x),\, x \in X\}$, называемого значением задачи (1). Как показывает пример функции $f(x) = e^x\,(x \in \mathbb{R})$, ограниченность снизу функции $f : X \to \mathbb{R}$ не гарантирует разрешимость задачи (1). Если функция f не ограничена снизу (или множество X пусто), то значение задачи полагается равным $-\infty$ (или $+\infty$ соответственно).

Элемент $\widehat{x}$ из X называют локальным решением задачи (1), если найдётся такое $\delta > 0$, что $f(x) \geqslant f(\widehat{x})$ $\forall x \in X \cap U(\widehat{x},\delta)$. Ясно, что каждое решение задачи (1) является и локальным решением; обратное неверно. Например, $\widehat{x} = 1$ – точка локального, но не глобального, минимума функции $f(x) = x^3 - 3x\,(x \in \mathbb{R})$.

Задачу максимизации функции f на множестве X обычно записывают в виде

$$f(x) \to \max,\ x \in X\,. \tag{2}$$

Элемент $\check{x}$ называют решением задачи (2), если $f(\check{x}) \geqslant f(x)$ $\forall x \in X$. Очевидно, что $\check{x}$ есть решение задачи (2) в том и только том случае, если $\check{x}$ является решением задачи

$$-f(x) \to \min,\ x \in X\,.$$

В этом смысле задача (2) сводится к задаче (1). Данное замечание позволяет без труда переносить результаты, полученные для задачи (1), на задачу (2) и наоборот. Аналогично сказанному ранее вводятся понятия точки локального максимума и значения задачи (2). Далее в основном рассматривается задача минимизации функции.

3. Теоремы существования. Множества вида

$$M(c) := \ \{x \in X,\ f(x) \leqslant c\},\ \ (c \in \mathbb{R})$$

называют нижними лебеговыми множествами функции $f : X \to \mathbb{R}$. Функция f полунепрерывна снизу на множестве X, если все её нижние лебеговы множества замкнуты.

Лемма 1. *Непрерывная на замкнутом множестве X функция f полунепрерывна снизу.*

◀ Действительно, пусть $x_k \in M_c$ и $x_k \to a$ при $k \to \infty$. Тогда справедливо включение $x_k \in X$ и $f(x_k) \leqslant c$. Так как множество X замкнуто, то $a \in X$. В силу непрерывности функции f имеем

$$f(a) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) \leqslant c,$$

т. е. $f(a) \leqslant c,\ \ a \in M_c$. Это и приводит к требуемому результату. ▶

Функция действительного переменного

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

полунепрерывна снизу на прямой $\mathbb{R}$, но разрывна в точке 0. Значение полунепрерывных снизу функций для теории экстремальных задач выясняет

Теорема 1. (Теорема Вейерштрасса) *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена и полунепрерывна снизу на замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Пусть при некотором действительном c её нижнее лебегово множество $M(c)$ непусто и ограничено. Тогда задача (1) имеет решение.*

◀ В рассматриваемом случае множество X непусто, поэтому значение задачи $d = \inf\{f(x), x \in X\} \in [-\infty, \infty)$. Фиксируем числовую последовательность c_k, для которой $c_k > d$ и $c_k \to d$ при $k \to \infty$. Множества $M(c_k)$ непусты ($c_k > d$) и замкнуты (функция f полунепрерывна снизу). Система замкнутых множеств $M(c_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) центрирована, поскольку

$$\bigcap_{k=1}^{l} M(c_k) = M(\min_{1\leqslant k\leqslant l} c_k) \neq \varnothing\,.$$

Согласно предложению 2 существует элемент $\overline{x}$, принадлежащий каждому из множеств $M(c_k), k \in \mathbb{N}$. В частности, $\overline{x} \in X,\ f(\overline{x}) \leqslant c_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Таким образом, имеем

$$d \leqslant f(\bar{x}) \leqslant \lim_{k\to\infty} c_k = d\,,$$

т. е. $f(\bar{x}) = d$ и $\bar{x}$ – решение задачи (1).▶

Следствие 1. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена и непрерывна на замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Если при некотором x_0 из X множество $\{x \in X,\ f(x) \leqslant f(x_0)\}$ ограничено, то существует решение задачи (1).*

Следствие 2. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена и непрерывна на замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Если при некотором x_0 из X множество $\{x \in X,\ f(x) \geqslant f(x_0)\}$ ограничено, то существует решение задачи (2).*

4. Проекция точки на множество. Пусть X – непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Совокупность чисел $\{|x-a|,\ x \in X\}$ ограничена снизу, поэтому конечно число $\inf\{|x-a|,\ x \in X\}$, называемое расстоянием от элемента a до множества X и обозначаемое символом $\mathrm{dist}(a, X)$. Очевидно, что если $a \in X$, то $\mathrm{dist}(a, X) = 0$. Для некоторых множеств может быть, что $\mathrm{dist}(a, X) = 0$, но $a \notin X$, например, $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $a = 1$. Элемент b из X называется проекцией точки a на множество $X \subset \mathbb{R}^n$, если $|a - b| = \mathrm{dist}(a, X)$.

Теорема 2. *Если X – замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, то для каждого элемента a из $\mathbb{R}^n$ существует его проекция на X.*

◀ Функция $f(x) = |x - a|$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Действительно, в силу неравенства треугольника имеем $|f(x') - f(x'')| \leqslant ||x' - a| - |x'' - a|| \leqslant |x' - x''|$, что и влечёт непрерывность функции f. Все нижние лебеговы множества рассматриваемой функции ограничены. Поэтому теорема 2 вытекает из теоремы 1.▶

Единственности проекции может и не быть. Действительно, проекцией точки a на сферу $S(a, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x - a| = \rho > 0\}$ является любой элемент этой сферы.

Введём некоторые определения. Отрезком $[u, v]$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество $[u, v] := \{w \in \mathbb{R}^n, w = (1 - \lambda)u + \lambda v,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ именуют выпуклым, если для любых точек u, v из X соединяющий их отрезок $[u, v]$ содержится в X. Например, выпуклы шары $B(a, \rho), U(a, \rho)$ и полупространство $\{x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leqslant h\}$, порождаемое ненулевым вектором p. Из определения ясно, что пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Теорема 3. *Если X – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, то для любого a из $\mathbb{R}^n$ существует не более чем одна проекция на множество X.*

◀ Пусть b_1, b_2 –проекции точки a на X. Тогда $|a - b_1| = |a - b_2| = \mathrm{dist}(a, X)$. Легко проверяется и геометрически очевидно тождество параллелограмма $|2a - b_1 - b_2|^2 + |b_1 - b_2|^2 = 4|a - b_1|^2$. Если $b_1 \neq b_2$, то

$$\left| a - \frac{b_1 + b_2}{2} \right| < |a - b_1| = \mathrm{dist}(a, X).$$

Так как множество X выпукло, то $\frac{b_1+b_2}{2} \in X$. Последнее неравенство противоречит определению $\mathrm{dist}(a, X)$.▶

Из теорем 2, 3 следует

Теорема 4. *Если X – выпуклое и замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, то для любого элемента a из $\mathbb{R}^n$ существует и единственна его проекция на множество X.*

Задача 1. *Описать способ нахождения проекции на замкнутые шар и полупространство.*

5. Дифференцируемые функции многих переменных. Пусть U – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ – числовая функция, $a \in U$. Функция f называется дифференцируемой в точке a, если её приращение $f(a+h)-f(a)$, соответствующее приращению $h=(h_1\dots h_n)^T$ аргумента x, допускает представление

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{n} p_i h_i \,+\, r_1(h),$$

где $p_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,\dots,n)$, $r_1(h)=o(|h|)$, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{r_1(h)}{|h|}=0\,.$$

Вектор-столбец $p=(p_1\dots p_n)^T$ называют градиентом функции f в точке a и обозначают символом $\nabla f(a)$. Компоненты p_i вектор-столбца $p=\nabla f(a)$ – это частные производные функции f в точке a, обозначаемые символами $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ $(i=1,\dots,n)$. Они могут быть определены и непосредственно (как производные по координатным направлениям). Именно, пусть h – ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$, $\varphi(t)=f(a+th)$ – сужение функции f на прямую $x=a+th$ $(t\in\mathbb{R})$. Тогда функция φ дифференцируема в точке 0; производная $\varphi'(0)$ называется производной функции f в точке a по направлению h и обозначается символом $f'(a,h)$. Известно, что

$$f'(a,h)=(\nabla f(a),h)\,. \tag{3}$$

В частности, если $e_i=(0\dots1\dots0)^T -$ i – ый координатный орт, то

$$f'(a,e_i)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ (i=1,\dots,n)\,.$$

Для дифференцируемости функции f в точке a достаточно, чтобы частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\dots,n)$ существовали в некоторой окрестности a и были непрерывны в точке a. Вектор-строку $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))$ обозначают символом $f'(a)$ и называют производной функции f в точке a. Равенство (3) эквивалентно соотношению

$$f'(a,h)=f'(a)h\,. \tag{3$'$}$$

Функцию $f:U\to\mathbb{R}$ называют дважды дифференцируемой в точке a, если все её частные производные первого порядка определены в окрестности точки a и дифференцируемы в этой точке. Для дважды дифференцируемой в точке a функции f существуют все частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ в этой точке; матрица

$$f''(a)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)\quad (i,j=1,\dots,n)$$

симметрична. Справедливо равенство

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\frac{1}{2}(f''(a)h,h)+r_2(h)\,, \tag{4}$$

$$r_2(h)=o(|h|^2)\,,$$

называемое формулой Тейлора с остатком в форме Пеано. Отметим соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} f(a+th)\Big|_{t=0} = (f''(a)h, h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j\,. \tag{5}$$

Функция f дважды дифференцируема в точке a, если все производные второго порядка существуют вблизи точки a и непрерывны в этой точке.

Задача 2. *Доказать непрерывную дифференцируемость на* $\mathbb{R}^n$ *функции* $f(x) = \operatorname{dist}^2(x, A)$*, где* A *– замкнутое выпуклое подмножество пространства* $\mathbb{R}^n$*.*

6. Необходимые условия локального минимума. Точку a из U назовём экстремалью (критической точкой) функции f, если f дифференцируема в этой точке и $\nabla f(a) = 0$. Это эквивалентно n скалярным равенствам

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(или одному векторному равенству $f'(a) = 0$).

Теорема 5 (Теорема Ферма). *Если* $\widehat{x}$ *– локальное решение задачи (1) и функция* f *дифференцируема в этой точке, то* $\widehat{x}$ *– экстремаль функции* f*.*

◀ Фиксируем число $\delta > 0$ так, что $B(\widehat{x}, \delta) \subset U$ и $f(x) \geqslant f(\widehat{x})$ для всех x из шара $B(\widehat{x}, \delta)$. Если $h \in \mathbb{R}^n$ и $|th| \leqslant \delta$, то $\widehat{x} + th \in B(\widehat{x}, \delta)$, поэтому $f(\widehat{x} + th) \geqslant f(\widehat{x})$. Следовательно,

$$0 \leqslant f(\widehat{x} + th) - f(\widehat{x}) = t(\nabla f(\widehat{x}), h) + r_1(th).$$

Считая $t > 0$, поделим последнее неравенство на t и устремим t к 0. В итоге получим неравенство $(\nabla f(\widehat{x}, h) \geqslant 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$. Полагая $h = -\nabla f(\widehat{x})$, имеем $-|\nabla f(\widehat{x})|^2 \geqslant 0$, т. е. $\nabla f(\widehat{x}) = 0$.▶

Для формулировки условий минимума второго порядка нам потребуются некоторые сведения о квадратичных формах. Пусть $A = (a_{ij})$ – симметричная матрица размеров $n \times n$,

$$\Phi(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j = (Ah, h) \ -$$

соответствующая квадратичная форма. Если $\Phi(h) \geqslant 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$, то квадратичная форма Φ называется неотрицательной; в этом случае пишут $A \geqslant 0$. Квадратичная форма (Ah, h) неотрицательна в том и только в том случае, если все главные миноры матрицы A неотрицательны. (Главными минорами матрицы $A = (a_{ij})$ называются все возможные определители

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_l} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_l} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{i_l i_1} & a_{i_l i_2} & \ldots & a_{i_l i_l} \end{pmatrix},$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant n, \ l = 1, \ldots, n$).

Квадратичная форма (Ah, h) называется положительно определённой, если она обращается в нуль только при $h = 0$; используется запись $A \gg 0$. Хорошо известен критерий Сильвестра: положительная определённость квадратичной формы (Ah, h) эквивалентна положительности всех угловых миноров матрицы A, т. е. определителей

$$\Delta_l = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ . & . & \dots & . \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ll} \end{pmatrix}, \quad l = 1 \dots, n\,;$$

в этом случае выполняется неравенство $(Ah, h) \geqslant \beta |h|^2$ с некоторой положительной постоянной β.

Сформулируем необходимые условия локального минимума второго порядка.

Теорема 6. *Если $\widehat{x}$ – локальное решение задачи (1) и функция f дважды дифференцируема в точке $\widehat{x}$, то квадратичная форма*

$$(f''(\widehat{x})h, h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\widehat{x}) h_i h_j$$

неотрицательна; краткая запись $f''(\widehat{x}) \geqslant 0$.

◀ В силу теоремы 5 $\widehat{x}$ – экстремаль функции f. Если $h \in \mathbb{R}^n$, то при достаточно малых t элемент $\widehat{x} + th$ принадлежит множеству $B(\widehat{x}, \delta)$. Согласно (4) имеем

$$0 \leqslant f(\widehat{x} + th) - f(\widehat{x}) = \frac{1}{2} t^2 (f''(\widehat{x})h, h) + r_2(th)\,.$$

Разделив обе части последнего неравенства на $t^2 > 0$ и переходя к пределу при $t \to 0$, получаем неравенство $(f''(\widehat{x})h, h) \geqslant 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.▶

Следствие. *Пусть a – экстремаль функции f и квадратичная форма $(f''(a)h, h)$ принимает на $\mathbb{R}^n$ значения разных знаков. Тогда экстремаль a не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума.*

Задача 3. *Пусть λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения симметричной матрицы A размеров $n \times n$, расположенные в порядке возрастания. Если $\lambda_k < -1$, то функция*

$$f(x) = (Ax, x) + e^{|x|^2}$$

имеет не менее k пар $x_i, -x_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ различных ненулевых экстремалей. Докажите этот результат при $k = 1$. Решение задачи в общем случае может составить содержательную курсовую работу.

7. Достаточные условия локального минимума . Приведём достаточные условия локального минимума второго порядка.

Теорема 7. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в критической точке $a \in \overset{\circ}{X}$ и квадратичная форма $(f''(a)h, h)$ положительно определена $(f''(a) \gg 0)$. Тогда точка a есть локальное решение задачи (1).*

◀ Поскольку $a \in \overset{\circ}{X}$, то $B(a,\rho) \subset X$ при некотором $\rho > 0$. Если $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| \leqslant \delta$, то $a + h \in B(a,\rho)$, поэтому имеет смысл разность $f(a+h) - f(a)$. Из формулы (4) вытекает равенство

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(f''(a)h, h) + r_2(h),$$

где $r_2(h) = o(|h|^2)$. По условию $f''(a) \gg 0$, следовательно, $(f''(a)h,h) \geqslant \beta|h|^2$ при некотором $\beta > 0$ и любом h из $\mathbb{R}^n$. Так как $r_2(h) = o(|h|^2)$, то найдётся такое $\delta > 0$, что при $|h| \leqslant \delta < \rho$ выполняется неравенство $|r_2(h)| \leqslant \beta|h|^2/4$; в частности, $r_2(h) \geqslant -\beta|h|^2/4$.

Объединяя полученные оценки, имеем

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(f''(a)h,h) + r_2(h) \geqslant \frac{\beta}{2}|h|^2 - \frac{\beta}{4}|h|^2 = \frac{\beta}{4}|h|^2,$$

т. е. $f(a+h) - f(a) \geqslant \beta|h|^2/4$ при $|h| \leqslant \delta$. Теперь очевидно, что a – локальное решение задачи (1).▶

Замечание 1. *Результаты, аналогичные теоремам 5–7, справедливы и для задачи (2).*

Замечание 2. *Если точка абсолютного минимума функции f существует и принадлежит $\overset{\circ}{X}$, а экстремаль функции f единственна, то она и является точкой глобального минимума функции f на множестве X. Аналогичное замечание справедливо и для точек максимума функции f.*

1.2 Правило множителей Лагранжа

1. Формулировка и предварительное обсуждение. Далее изучаются экстремальные задачи при дополнительных ограничениях типа равенств и неравенств. Существенную роль здесь играет аналог теоремы Ферма – правило множителей Лагранжа. Традиционные доказательства этого правила обычно используют достаточно сложные варианты теорем о неявных функциях и теорем о разделяющей гиперплоскости. Ниже приводится элементарное (в смысле используемых средств) доказательство правила множителей Лагранжа, опирающееся только на теорему Вейерштрасса о компактных множествах. Основу доказательства составляет предложенная в монографии [14] модификация метода штрафных функций.

В этом пункте приводится постановка исследуемой экстремальной задачи, формулируется основной результат – правило множителей Лагранжа. Доказательство правила составляет содержание следующего пункта.

Пусть на открытом множестве U пространства $\mathbb{R}^n$ определены два конечных семейства функций $f_i : U \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ и $f_i : U \to \mathbb{R}$ $(i \in I_0)$ (I,I_0 – конечные непересекающиеся множества; можно считать, что I, I_0 – подмножества $\mathbb{N}$). Пусть множество

$$X = \{x \in U | f_i(x) \leqslant 0 \quad (i \in I), \quad f_i(x) = 0 \quad (i \in I_0)\}$$

непусто. Рассматривается задача

$$f_0(x) \to \min, \tag{1}$$

$$f_i(x) \leqslant 0 \quad (i \in I), \qquad f_i(x) = 0 \quad (i \in I_0), \qquad x \in U. \tag{2}$$

Здесь $f_0 : U \to \mathbb{R}$ – действительная функция на множестве U. Элемент $\hat{x}$ из X называют локальным решением задачи (1), (2), если найдется такое $\delta > 0$, что $f_0(x) \geqslant f_0(\hat{x})$ $\forall x \in X \cap B(\hat{x}, \delta)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функция $g(t)$ дифференцируема и

$$g'(t) = \begin{cases} t, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Производная $g'(t)$ непрерывна на всей оси. Положим

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I_0} f_i^2(x) + \sum_{i \in I} g[f_i(x)].$$

Функция Φ определена на множестве U. Как нетрудно видеть, равенство $\Phi(x) = 0$ эквивалентно включению $x \in X$. Действительно, если $x \in X$, то $f_i(x) = 0 (i \in I_0)$, $g[f_i(x)] = 0 (i \in I)$, поэтому $\Phi(x) = 0$. Верно и обратное. Если функции f_i $(i \in I_1 = I \cup I_0)$ непрерывно дифференцируемы, то функция Φ также непрерывно дифференцируема.

Теорема 1. *Пусть $\hat{x}$ – локальное решение задачи (1), (2) и функции $f_i(i \in \{0\} \cup I_1)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$. Тогда найдутся такие числа $\hat{\lambda}_i$, не все равные нулю, что*

$$\hat{\lambda}_0 f_0'(\hat{x}) + \sum_{i \in I_1} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) = 0, \tag{3}$$

$$\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0 \quad (i \in I), \tag{4}$$

$$\hat{\lambda}_0 \geqslant 0, \hat{\lambda}_i \geqslant 0 \quad (i \in I). \tag{5}$$

Числа $\hat{\lambda}_i$ называют множителями Лагранжа, а саму теорему 1 – правилом множителей Лагранжа. Ясно, что вместе с набором $\hat{\lambda}_i$ соотношениям (3)–(5) удовлетворяет набор $t\hat{\lambda}_i$ $(t > 0)$ – набор множителей Лагранжа определяется неоднозначно. Наиболее важным необходимым условием оптимальности является равенство (3), называемое условием стационарности. Соотношение (4) называют условием дополнительной нежесткости. Если $f_i(\hat{x}) < 0$ для некоторого индекса i из I, то ограничение $f_i(x) \leqslant 0$ называют мягким в точке $\hat{x}$, в этом случае из (4) следует равенство $\hat{\lambda}_i = 0$.

2. Доказательство правила множителей Лагранжа.

◀ Каждому натуральному числу N поставим в соответствие функцию

$$\Phi^N(x) = f_0(x) + N\Phi(x) + \frac{|x - \hat{x}|^2}{2}$$

и экстремальную задачу

$$\Phi^N(x) \to \min, \qquad x \in B(\hat{x}, R). \tag{6}$$

Число $R > 0$ считаем настолько малым, что $B(\hat{x}, R) \subset U$, $f_0(x) \geqslant f_0(\hat{x})$ $\forall x \in B(\hat{x}, R)$, функции f_0, $f_i \, (i \in I_1)$ непрерывно дифференцируемы на шаре $B(\hat{x}, R)$.

Существование решения x^N задачи (6) следует из теоремы Вейерштрасса. Справедливо неравенство $\Phi^N(x^N) \leqslant \Phi^N(\hat{x})$ или, более подробно,

$$f_0(x^N) + N\Phi(x^N) + \frac{|x^N - \hat{x}|^2}{2} \leqslant f_0(\hat{x}). \tag{7}$$

В частности, из (7) вытекает оценка $N\Phi(x^N) \leqslant f_0(\hat{x}) - f_0(x^N)$. Последовательность $x^N \in B(\hat{x}, R)$. Если $\bar{x}$ – предельная точка этой последовательности, то $\Phi(\bar{x}) = 0$. Из (7) следует неравенство

$$f_0(\bar{x}) + \frac{|\bar{x} - \hat{x}|^2}{2} \leqslant f_0(\hat{x}).$$

С другой стороны, $\bar{x} \in B(\hat{x}, R)$, следовательно $f_0(\bar{x}) \geqslant f_0(\hat{x})$, поэтому $\bar{x} = \hat{x}$. Всякая предельная точка последовательности x^N совпадает с $\hat{x}$. Это означает, что $x^N \to \hat{x}$. При больших N элемент x^N есть внутренняя точка шара $B(\hat{x}, R)$.

Так как x^N – внутренняя точка шара $B(\hat{x}, R)$ и x^N минимизирует функцию Φ^N на этом шаре, то x^N — критическая точка функции Φ^N: $(\Phi^N)'(x^N) = 0$, т. е.

$$f_0'(x^N) + N\sum_{i \in I_0} f_i(x^N) f_i'(x^N) + N\sum_{i \in I} g'(f_i(x^N)) f_i'(x^N) + (x^N - \hat{x})^T = 0$$

Разделим это равенство на положительное число K^N так, чтобы получилось соотношение

$$\lambda_0^N f_0'(x^N) + \sum_{i \in I_1} \lambda_i^N f_i'(x^N) + \frac{(x^N - \hat{x})^T}{K^N} = 0, \tag{8}$$

в котором

$$(\lambda_0^N)^2 + \sum_{i \in I_1} (\lambda_i^N)^2 = 1, \quad \forall N. \tag{9}$$

Таким образом,

$$\lambda_0^N = \frac{1}{K^N}, \quad \lambda_i^N = \frac{N}{K^N} f_i(x^N) \quad (i \in I_0), \quad \lambda_i^N = \frac{N}{K^N} g'(f_i(x^N)) \quad (i \in I), \tag{10}$$

$$K^N = \left(1 + N^2 \sum_{i \in I_0} f_i^2(x^N) + N^2 \sum_{i \in I} |g'(f_i(x^N))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 1.$$

Каждая из последовательностей λ_i^N $(N = 1, 2, \dots)$ ограничена, поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $\lambda_i^N \to \hat{\lambda}_i$, $\forall i \in \{0\} \cup I_1$. Переходя в (9) к пределу, получаем равенство

$$\hat{\lambda}_0^2 + \sum_{i \in I_1} \hat{\lambda}_i^2 = 1.$$

Из этого равенства следует, что хотя бы одно из чисел $\hat{\lambda}_i$ отлично от нуля.

Полученный набор $\hat{\lambda}_i$ является искомым. Действительно, устремляя в (8) N к ∞, получаем условие стационарности (3) (используются соотношения $x^N \to \hat{x}$, $\lambda_i^N \to \hat{\lambda}_i$).

Если $f_i(\hat{x}) = 0$, то, очевидно, $\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0$ и условие дополнительной нежесткости выполнено. Если $f_i(\hat{x}) < 0$, то $f_i(x^N) < 0\ \forall N >> 1$, следовательно,

$$\lambda_i^N = \frac{N}{K^N} g'(f(x^N)) = 0,$$

поэтому $\hat{\lambda}_i = 0$, т. е. (4) справедливо и в этом случае. В силу (10) $\lambda_0^N \geqslant 0$, $\lambda_i^N \geqslant 0$ $(i \in I)$, поэтому $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\hat{\lambda}_i \geqslant 0\ \forall i \in I$.▶

Варианты теоремы 1 сохраняются, если одно из множеств I_0, I пусто.

Теорема 2. *Пусть $\hat{x}$ – локальное решение задачи*

$$f_0(x) \to \min,$$

$$f_i(x) \leqslant 0 \quad (i \in I), \quad x \in U,$$

и функции f_i непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$. Тогда найдутся такие числа $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$, не все равные 0, что выполнены условия (3), (4) с $I_1 = I$.

Теорема 3. *Пусть $\hat{x}$ - локальное решение задачи*

$$f_0(x) \to \min,$$

$$f_i(x) = 0 \quad (i \in I_0), \quad x \in U.$$

и функции f_i непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$. Тогда найдутся такие числа $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$, не все равные 0 одновременно, что выполнено условие (3) с $I_1 = I_0$.

Теоремы 1–3 выражают правило множителей Лагранжа. Во всех теоремах $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$. Если $\hat{\lambda}_0 > 0$, то разделив на $\hat{\lambda}_0$, получаем снова набор множителей Лагранжа, для которого $\hat{\lambda}_0 = 1$.

3. Условия регулярности в задачах с однотипными ограничениями. Лагранж считал, что всегда можно взять $\hat{\lambda}_0 = 1$. Однако это законно, лишь если $\hat{\lambda}_0 > 0$. Любое предположение, гарантирующее неравенство $\hat{\lambda}_0 > 0$, называют условием регулярности. В экстремальной задаче

$$f_0(x) = x_2 \to \min, \quad f_1(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1^2 = 0$$

решение $\hat{x} = (0, 0)^T$, условие регулярности не выполнено. Действительно,

$$f_0'(\hat{x}) = (0, 1), \quad f_1'(\hat{x}) = (0, 0)$$

и равенство $\hat{\lambda}_0 f_0'(\hat{x}) + \hat{\lambda}_1 f_1'(\hat{x}) = 0$ возможно лишь при $\hat{\lambda}_0 = 0$.

Теорема 4. *Если система векторов $f_i'(\hat{x})$ $(i \in I_0)$ линейно независима, то в предположениях теоремы 3 выполнено условие регулярности.*

◀ Согласно теореме 3 найдётся ненулевой набор $\hat{\lambda}_i$ $(i \in \{0\} \cup I_0)$ такой, что

$$\hat{\lambda}_0 f_0'(\hat{x}) + \sum_{i \in I_0} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) = 0.$$

Если $\hat{\lambda}_0 = 0$, то система векторов $f_i'(\hat{x})$ $(i \in I_0)$ линейно зависима. Противоречие.▶

Приведём условие регулярности для задачи с ограничениями типа неравенств $(I_0 = \varnothing)$. Существенную роль здесь играет множество индексов $I(\hat{x}) = \{i \in I, f_i(\hat{x}) = 0\}$, соответствующих жёстким ограничениям.

Теорема 5. *Если найдётся вектор v из $\mathbb{R}^n$ такой, что $f_i'(\hat{x})v < 0 \ \forall i \in I(\hat{x})$, то в предположениях теоремы 2 $\hat{\lambda}_0 > 0$.*

◀ В силу теоремы 2 существует ненулевой набор неотрицательных чисел $\hat{\lambda}_i$ $(i \in \{0\} \cup I)$ такой, что

$$\hat{\lambda}_0 f_0'(\hat{x}) + \sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) = 0.$$

Если $\hat{\lambda}_0 = 0$, то последнее равенство влечёт соотношения

$$\sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x})v = \sum_{i \in I(\hat{x})} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x})v = 0\,.$$

Это противоречит неравенствам $f_i(\hat{x})v < 0 \ \forall i \in I(\hat{x})$.▶

Для аффинных функций f_i $(i \in I)$ условие регулярности всегда выполнено. Этот факт не следует из теоремы 5 и будет доказан позднее.

4. Условия регулярности в задачах со смешанными ограничениями. Рассмотрим задачу (1),(2), в которой $I \neq \varnothing, I_0 \neq \varnothing$. Будем считать выполненными условия теоремы 1. Согласно этой теореме существует ненулевой набор множителей Лагранжа $\hat{\lambda}_i$ $i \in \{0\} \cup I \cup I_0$ такой, что имеют место соотношения (3)–(5). Как и в предшествующем пункте, полагаем $I(\hat{x}) := \{i \in I, f_i(\hat{x}) = 0\}$.

Теорема 6. *Пусть система векторов $f_i'(\hat{x})$ $(i \in I_0 \cup I(\hat{x}))$ линейно независима. Тогда выполнено условие регулярности.*

◀ Если i- ое ограничение мягкое, то $\hat{\lambda}_i = 0$. Поэтому из соотношений (3), (4) вытекает равенство

$$\hat{\lambda}_0 f_0'(\hat{x}) + \sum_{i \in I_0 \cup I(\hat{x})} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) = 0.$$

Предположение $\hat{\lambda}_0 = 0$ влечёт за собой линейную независимость системы $f_i'(\hat{x})$ $(i \in I_0 \cup I(\hat{x}))$, а это противоречит условиям теоремы.▶

В литературе предположения теоремы 6 именуют условием **A** (см. [14]). Менее ограничительно условие регулярности **Б**: *система векторов $f_i'(\hat{x})$ $(i \in I_0)$ линейно независима и найдётся вектор v из $\mathbb{R}^n$ такой, что*

$$f_i'(\hat{x})v = 0 \ (i \in I_0), \quad f_i'(\hat{x})v < 0 \ (i \in I(\hat{x})).$$

Теорема 7. *При замене условия* **A** *на условие* **Б** *утверждение теоремы 6 остаётся справедливым.*

◀Предположим, что $\hat{\lambda}_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{i \in I_0 \cup I(\hat{x})} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i \in I_0 \cup I(\hat{x})} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) v = \sum_{i \in I(\hat{x})} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) v = 0.$$

В сочетании с условием $f_i'(\hat{x})v < 0$ $(i \in I(\hat{x}))$ это влечёт равенства $\hat{\lambda}_i = 0$ $\forall i \in I$. Но тогда система вектор-строк $f_i'(\hat{x})$ $(i \in I_0)$ линейно зависима. Противоречие. ▶

5. Задача на минимакс (необходимые условия). Пусть f – функция, определённая на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Её надграфиком (эпиграфом) называют подмножество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, обозначаемое символом $\operatorname{epi} f$ и определяемое равенством

$$\operatorname{epi} f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, x \in X,\ z \geqslant f(x) \right\}.$$

Лемма 1. *Задача*

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \tag{11}$$

эквивалентна задаче

$$z \to \min, \quad \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{epi} f \tag{12}$$

в следующем смысле: если $\hat{x}$ *– решение задачи (11), то вектор с компонентами* $\hat{x}, f(\hat{x})$ *есть решение задачи (12), верно и обратное: первая компонента решения задачи (12) есть решение задачи (11).*

◀ Доказательство предоставляется провести самостоятельно; геометрически факт совершенно очевиден. ▶

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задано семейство функций $f_i : X \to \mathbb{R}$ $(i \in I), I$ – конечное множество индексов. Функция

$$f(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$$

также определена на множестве X. Задача минимизации функции f на множестве X записывается в виде

$$\max_{i \in I} f_i(x) \to \min, \quad x \in X \tag{13}$$

и называется задачей на минимакс. Она может быть сведена к задаче на условный экстремум. Сопоставим задаче (13) задачу

$$z \to \min, \tag{14}$$

$$f_i(x) - z \leqslant 0,\ x \in X,\ i \in I. \tag{15}$$

Лемма 2. *а) Если* $\hat{x}$ *– решение задачи (13), то* $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ f(\hat{x}) \end{pmatrix}$ *– решение задачи (14),(15); б) если* $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ *– решение задачи (14),(15), то* $\hat{x}$ *– решение задачи (13) и* $\hat{z} = f(\hat{x})$.

◀Из определения функции f вытекает равенство

$$\operatorname{epi} f = \bigcap_{i\in I} \operatorname{epi} f_i .$$

Теперь доказываемое утверждение следует из леммы 1.▶

Теорема 8. *Пусть X – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $\hat{x}$ – решение задачи (13) и функции $f_i : X \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\hat{x}$. Пусть $J(\hat{x}) := \{i \in I, f_i(\hat{x}) = f(\hat{x})\}$. Тогда существуют такие неотрицательные числа μ_j ($j \in J(\hat{x})$, что выполнены соотношения*

$$\sum_{j\in J(\hat{x})} \mu_j f_j'(\hat{x}) = 0, \quad \sum_{j\in J(\hat{x})} \mu_j = 1. \tag{16}$$

◀ Определим на множестве $X \times \mathbb{R}$ функции $g_0(x, z) = z$, $g_i(x, z) = f_(x) - z$ $(i \in I)$. Задача (14),(15) может быть записана в виде

$$g_0(x, z) \to \min, \tag{14'}$$

$$g_i(x, z) \leqslant 0, \quad i \in I. \tag{15'}$$

Функции $g_i(x, z)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ ($\hat{z} = f(\hat{x})$. При этом

$$g_0'(\hat{x}, \hat{z}) = (0, 1),\ g_i'(\hat{x}, \hat{z}) = (f_i'(\hat{x}), -1)\ (i \in I).$$

Если $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – вектор из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, то $g_i'(\hat{x}, \hat{z})v = -1 < 0\ \forall i \in I$. Поэтому в рассматриваемой ситуации выполнено условие регулярности (см. теорему 5). Следовательно, существуют неотрицательные числа $\hat{\lambda}_i$ $(i \in I)$, удовлетворяющие соотношениям

$$g_0'(\hat{x}, \hat{z}) + \sum_{i\in I} \hat{\lambda}_i g_i'(\hat{x}, \hat{z}) = 0, \tag{17}$$

$$\hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}, \hat{z}) = 0\ (i \in I). \tag{18}$$

Из условия (18) вытекает, что $\hat{\lambda}_i = 0$, если $i \notin I$. Равенство (17) влечёт соотношения (16) с $\mu_j = \hat{\lambda}_j$. Достаточно спроектировать (17) на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$ сответственно. Проектирование на $\mathbb{R}^n$ влечёт первое из соотношений (16), проектирование на $\mathbb{R}$ приводит ко второму из равенств (16).▶

6. Замечания и примеры. Правило множителей Лагранжа представляет необходимое условие минимума первого порядка. Оно может быть дополнено необходимыми и достаточными условиями минимума и максимума второго порядка (см., например, [4], [14], [5]). В ряде интересных частных случаев решение экстремальной задачи можно найти, опираясь лишь на теорему существования и правило множителей Лагранжа.

Пример 1. *Найти максимум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$ при условиях*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S > 0,\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0.$$

◀ Перечисленные условия выделяют замкнутое ограниченное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Поскольку функция f непрерывна, то задача имеет решение $\check{x} = (\check{x}_1 \check{x}_2 \dots \check{x}_n)^T$. Очевидно, что $\check{x}_i > 0\,\forall i$. Следовательно, $\check{x}$ является решением задачи

$$f_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1 x_2 \dots x_n \to \min,$$

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - S = 0 \quad (x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n).$$

В силу правила множителей Лагранжа существуют числа λ_0, λ_1, не равные 0 одновременно и такие, что $\check{x}$ есть экстремаль функции $F = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$. Таким образом, $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, т. е. $-\lambda_0 x_1 x_2 \dots x_n + \lambda_1 x_i = 0$. Отсюда вытекает, что $\lambda_0 \neq 0, \lambda_1 \neq 0$, $\check{x}_i = S/n\ \forall i$. Искомый максимум функции достигается в единственной точке $\check{x} = Sn^{-1}\overbrace{(11\dots1)}^{n}$.▶

Вытекающее из проведённых рассуждений неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

имеет многочисленные приложения в оптимизации. В качестве иллюстрации рассмотрим:

Пример 2. *Через точку M, расположенную внутри трёхгранного угла Q, провести плоскость, отсекающую от него тетраэдр наименьшего объёма.*

◀ Примем вершину Q в качестве начала координат, а координатные оси направим вдоль линий пересечения плоскостей, образующих трёхгранный угол. В соответствующей косоугольной системе координат угол Q описывается соотношениями $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$, точка M имеет положительные координаты x_0, y_0, z_0. Если плоскость

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

проходит через точку M, то

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1.$$

Объём тетраэдра, отсекаемого этой плоскостью, вычисляется по формуле $V = kabc$, где k – некоторая положительная постоянная. Следовательно,

$$\frac{k}{V} = \frac{1}{abc} = \frac{1}{x_0 y_0 z_0}\frac{x_0 y_0 z_0}{abc} \leqslant \frac{1}{x_0 y_0 z_0}\left(\frac{1}{3}(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c})\right)^3 \leqslant \frac{1}{27 x_0 y_0 z_0},$$

т. е. $V \geqslant 27 k x_0 y_0 z_0$. Минимальное значение отсекаемого объёма достигается, если $a = 3x_0, b = 3y_0, c = 3z_0$. Читателю предлагается самостоятельно дать геометрическую интерпретацию полученного результата.▶

Пример 3 . *Среди тетраэдров с заданными основанием и длиной высоты найти имеющий наименьшую боковую поверхность.*

◀ Пусть основание пирамиды – треугольник ABC, длина высоты равна h, O – основание высоты пирамиды, x – расстояние от O до прямой BC, взятое со знаком плюс, если O лежит по ту же сторону от BC, что и треугольник ABC, и со знаком минус в обратном случае. Аналогично (как ориентированные расстояния до прямых AC и AB)определим y и z. Тогда площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}(ax + by + cz),$$

где a, b, c – длины сторон BC, CA, AB соответственно. Площадь боковой поверхности тетраэдра

$$S_0 = \frac{1}{2}(a\sqrt{x^2 + h^2} + b\sqrt{y^2 + h^2} + c\sqrt{z^2 + h^2}).$$

Рассматриваемая геометрическая задача сводится к следующей задаче на условный экстремум

$$f_0(x, y, z) = x\sqrt{x^2 + h^2} + y\sqrt{y^2 + h^2} + z\sqrt{z^2 + h^2} \to \min,$$

$$f_1(x, y, z) = ax + by + cz - 2S_0 = 0.$$

Функция f_0 непрерывна, при любом действительном t нижнее лебегово множество $\{f_0 \leqslant t\}$ этой функции ограничено. Поэтому существование решения $(x\,y\,z)^T$ этой задачи вытекает из теоремы Вейерштрасса. В данном случае $f_1'(x, y, z) = (a\,b\,c) \neq 0$, что обеспечивает регулярность ограничения связи $f_1(x, y, z) = 0$. В силу правила множителей Лагранжа точка $(x\,y\,z)^T$ является экстремалью функции $F = f_0 + \lambda f_1$. Отсюда легко выводятся равенства $x = y = z$. Таким образом, O есть центр окружности, вписанной в треугольник ABC. ▶

Наряду с методом множителей Лагранжа в задачах на условный экстремум широко применяются метод исключения, метод штрафных функций, метод проекции градиента и другие численные методы (см., например, [4], [9], [14], [12], [17] и приведённую в них литературу). Некоторые методы приближенного решения экстремальных задач обсуждаются ниже.

1.3 Выпуклые функции и выпуклые множества

1. Определение и простейшие свойства выпуклых функций. Пусть X – выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют выпуклой, если для любых $u \in X$, $v \in X$, $\lambda \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f[(1 - \lambda)u + \lambda v] \leqslant (1 - \lambda)f(u) + \lambda f(v). \tag{1}$$

Соотношение (1) называют неравенством Иенсена. Его геометрический смысл следующий: надграфик функции f есть выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Если при $u \neq v$ неравенство (1) является строгим, то функцию f называют строго выпуклой на множестве X.

Любая аффинная функция $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n + b$ выпукла. Для неё (1) превращается в равенство, поэтому она не является строго выпуклой. Функция $|x|^2$ строго выпукла на $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть $u \neq v, \lambda \in (0,1)$. Тогда

$$|(1-\lambda)u + \lambda v|^2 = (1-\lambda)^2|u|^2 + 2\lambda(1-\lambda)(u,v) + \lambda^2|v|^2 <$$

$$< (1-\lambda)^2|u|^2 + \lambda(1-\lambda)(|u|^2+|v|^2) + \lambda^2|v|^2 = (1-\lambda)|u|^2 + \lambda|v|^2$$

в силу неравенства $2(u,v) < |u|^2 + |v|^2$.

Отметим некоторые свойства класса выпуклых функций.

1. *Неотрицательная линейная комбинация конечного числа выпуклых функций есть снова выпуклая функция.*

2. *Точная верхняя грань любого семейства выпуклых функций есть выпуклая функция.*

3. *Если $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – возрастающая выпуклая функция, $g : X \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, то суперпозиция $\varphi \circ g : X \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция.*

4. *Если f – выпуклая функция, то нижние лебеговы множества функции выпуклы.*

◀ **1.** Неравенства одноимённого смысла можно складывать и умножать на неотрицательные числа.

2. Пусть функции $f_i : X \to \mathbb{R},\ (i \in I)$ выпуклы,

$$f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$$

– точная верхняя грань семейства функций f_i ($i \in I$, множество I может быть бесконечным). Очевидно соотношение

$$\operatorname{epi} f = \bigcap_{i\in I} \operatorname{epi} f_i.$$

Теперь достаточно учесть, что пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.

3. Используются выпуклость функций φ, f и возрастание функции φ:

$$\varphi(f[(1-\lambda)u + \lambda v]) \leqslant \varphi[(1-\lambda)f(u) + \lambda f(v)] \leqslant (1-\lambda)\varphi[f(u)] + \lambda\varphi[f(v)].$$

4. Пусть $f(u) \leqslant C,\ f(v) \leqslant C$. Тогда $f[(1-\lambda)u + \lambda v] \leqslant (1-\lambda)f(u) + \lambda f(v) \leqslant C$. Следовательно, все нижние лебеговы множества функции f выпуклы.▶

Отметим без доказательства следующие факты: выпуклая функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $\overset{\circ}{X}$ и почти всюду дифференцируема.

2. Критерии выпуклости дифференцируемых функций. Установим многомерные аналоги хорошо известных для функций одного переменного признаков выпуклости. Пусть U – открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, $f'(x)$ – производная функции f в точке x.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) функция $f : U \to \mathbb{R}$ выпукла;

2) для любой пары u, v из U имеет место неравенство

$$f(v) - f(u) \geqslant f'(u)(v-u); \tag{2}$$

3)справедливо соотношение

$$(f'(v) - f'(u), v-u) \geqslant 0 \ \forall u, v \in U. \tag{3}$$

◀ 1) → 2). В силу неравенства Иенсена

$$f[u + \lambda(v-u)] - f(u) \leqslant \lambda[f(v) - f(u)] \, (0 < \lambda < 1).$$

Следовательно,

$$\frac{f[u+\lambda(v-u)] - f(u)}{\lambda} \leqslant f(v) - f(u).$$

При $\lambda \to +0$ получаем неравенство (2).

2) → 1). Из (2) следует равенство

$$f(x) = \sup_{u \in U} \{f(u) + f'(u)(x-u)\}.$$

Функция f выпукла как точная верхняя грань некоторого семейства выпуклых (и даже аффинных) функций.

2) → 3) Меняя в неравенстве (2) элементы u, v местами, приходим к неравенству

$$f(u) - f(v) \geqslant f'(v)(u-v).$$

Складывая его с (2), получаем (3).

3) → 2). В силу формулы конечных приращений справедливо равенство $f(v) - f(u) = f'(w)(v-u)$, в которой $w = u + \theta(v-u)$, $0 < \theta < 1$. Теперь 2) вытекает из соотношений

$$f'(w)(v-u) = \frac{1}{\theta} f'(w)(w-u) \geqslant \frac{1}{\theta} f'(u)(w-u) = f'(u)(v-u).$$

Итак, условие 2) эквивалентно каждому из условий 1), 3).▶

Геометрический смысл условия 2) достаточно ясен. При $n = 1$ оно означает, что график выпуклой функции лежит выше касательной к нему. Для дважды дифференцируемой функции $f : U \to \mathbb{R}$ справедлив следующий критерий выпуклости.

Теорема 2. *Выпуклость дважды дифференцируемой функции f эквивалентна неотрицательности второй производной ($f''(x) \geqslant 0$), т. е. неотрицательности квадратичной формы $(f''(x)h, h)$.*

◀ Схема доказательства. Выпуклость функции f эквивалентна выпуклости её сужения на каждую прямую $a + th$, т. е. выпуклости функции $\varphi(t) = f(a+th)$ одного переменного t. Теперь утверждение следует из равенства $\varphi''(t) = (f''(a + th)h, h)$ и критерия выпуклости функции одного переменного.▶

Если $f''(x) \gg 0 \ \forall x \in U$, то функция f строго выпукла. Для проверки условия $f''(x) \gg 0$ можно использовать критерий Сильвестра. Теоремы 1, 2 удобно комбинировать с отмеченными в первом пункте свойствами 1–4 выпуклых функций.

Задача 1. *Исследовать на выпуклость и строгую выпуклость функцию*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_i} \ (p_i > 0).$$

Задача 2. *Пусть Q – непустое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$. Доказать выпуклость функции $f(x) = \operatorname{dist}(x, Q)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.*

3. Выпуклая и коническая оболочка множества. Выпуклой комбинацией точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется точка a, представимая в виде $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots \lambda_m a_m$, где $\lambda_i \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$. Выпуклой оболочкой множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множество, состоящее из выпуклых комбинаций точек из A. Оно обозначается символом $\operatorname{co} A$. Множество $\operatorname{co} A$ выпукло и содержит A; можно показать, что $\operatorname{co} A$ наименьшее из выпуклых множеств, содержащих множество A.

Конической комбинацией точек $a_1, \ldots, a_m$ из $\mathbb{R}^n$ называют точку a, представимую в виде $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$, где $\lambda_i \geqslant 0$. Конической оболочкой множества A называется множество, обозначаемое символом $\operatorname{con} A$ и состоящее из всех конических комбинаций точек из A.

Задача 3. *Пусть отображение Φ сопоставляет x из $\mathbb{R}^n$ элемент $\Phi(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Доказать эквивалентность следующих включений: $a \in \operatorname{co} A$ и $\Phi(a) \in \operatorname{con} \Phi(A)$.*

Лемма 1 (Лемма Каратеодори). *Любой элемент a из $\operatorname{con} A$ допускает представление*

$$a = \sum_{i \in J} \mu_i a_i \,,$$

в котором $a_i \in A$, $\mu_i > 0 \ \forall i \in J$ и система векторов a_i $(i \in J)$ линейно независима.

◀ Поскольку $a \in \operatorname{con} A$, то a есть коническая комбинация элементов a_i из A, т. е.

$$a = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \,,$$

где $\lambda_i > 0 \ \forall i \in I$. Если система векторов a_i $(i \in I)$ линейно независима, то всё доказано. В противном случае найдутся числа t_i $(i \in I)$, одно из которых положительно, такие, что

$$\sum_{i \in I} t_i a_i \ = \ 0\,.$$

Очевидно равенство

$$a = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \lambda t_i) a_i \,.$$

Если $\lambda = \min\{\lambda_i/t_i\}$ $(t_i > 0)$, то все числа $\lambda_i - \lambda t_i$ неотрицательны и хотя бы одно из них равно 0. Это даёт возможность представить a в виде конической комбинации системы элементов $a_i\,(i \in I_1)$, где I_1 – собственное подмножество I. Так как I – конечное множество, то после конечного числа шагов придём к требуемому результату.▶

Следствие 1. *Любой элемент из* con A *есть коническая комбинация не более чем* n *элементов из* A.

Следствие 2. *Любая точка из* co A *есть выпуклая комбинация не более чем* $n+1$ *точек из* A.

◀ В пространстве $\mathbb{R}^n$ всякая линейно независимая система содержит не более n элементов. Это замечание влечёт за собой следствие 1. Доказательство следствия 2 опирается на результат, сформулированный в задаче 3. ▶

Лемма 2. *Коническая оболочка конечного числа элементов есть замкнутое подмножество* $\mathbb{R}^n$.

◀ Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $K = \mathrm{con}\, A$. Если система векторов a_i линейно независима, то определяемое равенством

$$\mathscr{F}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

отображение положительного ортанта

$$\mathbb{R}^m_+ := \{\Lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m,\, \lambda_i \geqslant 0,\, i = 1, \ldots, m\}$$

на K есть гомеоморфизм. Отсюда легко выводится замкнутость множества K в рассматриваемом случае.

Рассмотрим теперь случай произвольной конечной системы элементов $a_1, \ldots, a_m$. Согласно лемме 1 множество $K = \mathrm{con}\{a_1, \ldots, a_m\}$ можно представить в виде объединения конечного числа множеств K_+, каждое из которых есть коническая оболочка линейно независимой системы $\{a_i\}$. В силу уже доказанного множества K_+ замкнуты. Поскольку объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, то множество K замкнуто.▶

Задача 4. *Доказать компактность выпуклой оболочки компактного множества. Привести пример замкнутого множества на плоскости, выпуклая оболочка которого не замкнута.*

4. Конус опорных функционалов. Линейным функционалом на пространстве $\mathbb{R}^n$ называется функция $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами

$$l(x+y) = l(x) + l(y), \quad l(\lambda x) = \lambda l(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Любая линейная функция на $\mathbb{R}^n$ допускает представление $l(x) = px = p_1 x_x 1 + \cdots + p_n x_n$, в котором x_i – компоненты вектор-столбца x, а p_i – компоненты вектор-строки p. Это позволяет в дальнейшем идентифицировать пространство линейных функционалов на $\mathbb{R}^n$ с линейным пространством $\mathbb{R}_n$ вектор-строк $p = (p_1 \ldots p_n)$, изоморфным пространству $\mathbb{R}^n$. В $\mathbb{R}_n$ стандартным образом вводится структура евклидова пространства.

Пусть Q – выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, $z \in Q$. Линейный функционал l назовём опорным к множеству Q в точке z, если $l(z) \geqslant l(v)\,\forall v \in Q$. Совокупность опорных функционалов обозначим символом $N_Q(z)$ и назовём конусом опорных функционалов к множеству Q в точке z. Очевидно, что $0 \in N_Q(z)$. Если $z \in \overset{\circ}{Q}$, то $N_Q(z) = 0$. Действительно, производная в точке локального максимума равна 0.

Для граничной точки z конус $N_Q(z)$ может быть достаточно сложно устроенным множеством. Отметим некоторые свойства конуса опорных функционалов:

1°.*Если $l_1, l_2 \in N_Q(z)$, то $l_1 + l_2 \in N_Q(z)$.*

2°.*Если $l \in N_Q(z)$, $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda l \in N_Q(z)$.*

3°. *Опорный конус есть замкнутое множество.*

Способы нахождения конуса опорных функционалов приводятся в следующем параграфе. Здесь же обсудим роль этого понятия в оптимизационных задачах.

5. Условия минимума на выпуклом множестве. Пусть f – числовая функция, определённая на открытом и выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$; (случай $U = \mathbb{R}^n$ не исключается ; при желании можно ограничиться только этим частным случаем). Пусть Q – выпуклое подмножество U. Рассматривается задача

$$f(x) \to \min, \quad x \in Q. \tag{4}$$

Стандартным образом вводятся понятия решения и локального решения задачи (4).

Теорема 3. *Пусть $\hat{x}$ – локальное решение задачи (3) и функция f дифференцируема в этой точке. Тогда $-f'(\hat{x}) \in N_Q(\hat{x})$ или в эквивалентной (и чаще используемой) форме*

$$0 \in f'(\hat{x}) + N_Q(x). \tag{5}$$

◀ Фиксируем элемент x из Q и введём вспомогательную функцию $\varphi(t) = f[\hat{x} + t(x - \hat{x})]$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Поскольку множество Q выпукло, то $\hat{x} + t(x - \hat{x}) \in Q$, следовательно, функция $\varphi(t)$ определена на отрезке [0,1]. Поскольку $\hat{x}$ – локальное решение задачи (4), то $\varphi(t) \geqslant \varphi(0)$ при малых положительных t. Таким образом,

$$0 \leqslant \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = f'(\hat{x})(x - \hat{x}).$$

Это эквивалентно включению $-f'(\hat{x}) \in N_Q(\hat{x})$.▶

Для выпуклых функций необходимое условие минимума является и достаточным. Справедливо следующее важное дополнение к теореме 3.

Теорема 4. *Пусть f – выпуклая на множестве Q и дифференцируемая в точке $\hat{x} \in Q$ функция. Если справедливо соотношение (5), то $\hat{x}$ – решение задачи (4).*

◀ Из выпуклости функции $f : Q \to \mathbb{R}$ следует (см. п. 2) неравенство $f(x) - f(\hat{x}) \geqslant f'(\hat{x})(x - \hat{x})\,\forall x \in Q$. Так как $-f'(\hat{x}) \in N_Q(\hat{x})$, то справедливо неравенство $f'(\hat{x})(x - \hat{x}) \geqslant 0\,\forall x \in Q$, поэтому $f(x) - f(\hat{x}) \geqslant 0\,\forall x \in Q$.▶

В случае $\hat{x} \in \overset{\circ}{Q}$ условие (5) сводится к условию $f'(\hat{x}) = 0$. Расшифровка условия (5) для граничной точки $\hat{x}$ не столь проста. Здесь требуется информация о конусе опорных функционалов $N_Q(\hat{x})$.

6. Характеристика проекции на выпуклое замкнутое множество. Пусть Q – выпуклое и замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой точки a из $\mathbb{R}^n$ существует и единственна ближайшая к ней точка b из Q, называемая проекцией точки a на множество Q (см. 1.1). Точка b есть решение экстремальной задачи

$$f(x) = |x-a|^2 \to \min, \quad x \in Q. \tag{6}$$

Функция f выпукла и дифференцируема на всём пространстве $\mathbb{R}^n$. Поэтому к задаче (6) применима теорема 4, согласно которой точка b из Q является решением задачи (6) в том и только в том случае, если

$$f'(b)(x-b) \geqslant 0 \;\forall x \in Q. \tag{7}$$

Так как $f'(b)v = 2(b-a, v)$, то (7) эквивалентно неравенству

$$(b-a, x-b) \geqslant 0 \;\forall x \in Q. \tag{8}$$

Геометрический смысл неравенства (8) очевиден : векторы $b-a, x-b$ образуют острый угол. Суммируя проведённые рассуждения, получаем следующий результат.

Теорема 5. *Для того чтобы элемент b из Q был проекцией точки a на множество Q, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение (8).*

Остановимся ещё на одной геометрической интерпретации неравенства (8). Введём линейный функционал $l(v) = (b-a, v)$ $(v \in \mathbb{R}^n$. Соотношение (5) эквивалентно неравенству $l(x) \leqslant l(b)$ $\forall x \in Q$, т.е. $l \in N_Q(b)$. Если $a \notin Q$, то $b \neq a$, l – ненулевой функционал, при этом

$$l(a) = (a-b, a) > (a-b, a) \geqslant l(x) \; x \in Q.$$

В частности, справедлива

Теорема 6. *Пусть точка a не принадлежит выпуклому и замкнутому подмножеству Q пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда найдётся такой линейный функционал l, что $l(a) > \max\{l(x),\, x \in Q\}$.*

Если в условиях теоремы 6 $l(a) > c > \max\{l(x),\, x \in Q\}$, то множество Q и точка a лежат по разные стороны от гиперплоскости $l(x) = c$. В связи с этим теорему 6 иногда именуют теоремой о разделяющей гиперплоскости. Из неё вытекает, например, что всякое замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ есть пересечение содержащих его полупространств.

1.4 Выпуклая оптимизация

1. Условие Слейтера. Пусть U – открытое выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $f_i : U \to \mathbb{R}^n$ $(i \in I)$ – конечная система выпуклых функций. Множество $Q := \{x \in U, f_i(x) \leqslant 0,\ i \in I\}$ выпукло как пересечение системы выпуклых множеств $\{x \in U,\, f_i(x) \leqslant 0\}$ $(i \in I)$. Систему неравенств $f_i(x) \leqslant 0$ назовём сильно совместной, если существует элемент $\bar{x}$ из U, для которого $f_i(\bar{x}) < 0$ $\forall i \in I$; в этом случае говорят, что выполнено условие Слейтера.

Выясним структуру конуса опорных функционалов $N_Q(z)$ для z из множества Q. Если $f_i(z) < 0\ \forall i \in I$, то $z \in \mathring{Q}$, поэтому $N_Q(z) = \{0\}$. Пусть $I(z) := \{i \in I,\ f_i(z) = 0\} \neq \varnothing$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $f_i : U \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ – выпуклые функции, удовлетворяющие условию Слейтера. Пусть $z \in Q$, $I(z) \neq \varnothing$ и функции f_i непрерывно дифференцируемы в окрестности точки z. Тогда $N_Q(z)$ совпадает с конической оболочкой множества $\{f_i'(z),\, i \in I(z)\}$.*

◀ Пусть $l \in N_Q(z)$. Тогда z есть решение экстремальной задачи

$$-l(x) \to \min,\ f_i(x) \leqslant 0,\ i \in I. \tag{1}$$

В точке z выполнено условие регулярности Б (см. раздел 1.2, п. 4). Действительно, пусть $i \in I(z)$. Тогда $f_i(z) = 0$, $f_i(\bar{x}) < 0$, поэтому $f_i'(z)(\bar{x} - z) \leqslant f_i(\bar{x}) - f(z) < 0$. Таким образом, условие регулярности выполнено, что позволяет в правиле множителей Лагранжа (см. 1.2) взять $\hat{\lambda}_0 = 1$. Согласно этому правилу существуют числа $\hat{\lambda}_i$ $(i \in I)$, удовлетворяющие соотношениям

$$-l + \sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i f_i'(z) = 0, \tag{2}$$

$$\hat{\lambda}_i f_i(z) = 0,\ \hat{\lambda}_i \geqslant 0,\ (i \in I). \tag{3}$$

Соотношения (2),(3) означают, что любой функционал из $N_Q(z)$ допускает представление

$$l = \sum_{i \in I(z)} \hat{\lambda}_i f_i'(z), \tag{4}$$

где $\hat{\lambda}_i$ – неотрицательные числа. Это влечёт за собой требуемый результат.▶

Далее будет установлено, что для аффинных функций f_i условие Слейтера является лишним.

2. Дифференциальные варианты теоремы Куна-Таккера. Применим предшествующие результаты к задаче минимизации функции $f_0 : U \to \mathbb{R}$ на множестве Q :

$$f_0(x) \to \min, \tag{4}$$

$$f_i(x) \leqslant 0\ (i \in I,\, x \in U). \tag{5}$$

Эта задача представляет частный случай рассмотренной в 1.2 экстремальной задачи. Для неё (при некоторых предположениях) справедливо необходимое условие локального минимума – правило множителей Лагранжа. Специфика рассматриваемого случая позволяет дополнить предшествующие результаты по двум направлениям. Во-первых, становятся более обозримыми условия регулярности ограничений связи, во-вторых, удаётся сформулировать достаточные условия абсолютного минимума, совпадающие по форме с необходимыми условиями локального минимума.

Теорема 2. *Пусть $f_i : U \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ – выпуклые функции, удовлетворяющие условию Слейтера. Пусть $\hat{x}$ – локальное решение задачи (4), (5), функции $f_i\,(i \in I)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$, функция f_0*

дифференцируема в точке $\hat{x}$. Тогда существуют такие неотрицательные числа $\hat{\lambda}_i$ $(i \in I)$, что выполняются условия экстремальности

$$f_0'(\hat{x}) + \sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i f_i'(\hat{x}) = 0 \tag{6}$$

и условие дополняющей нежёсткости

$$\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0 \, (i \in I). \tag{7}$$

◀ Согласно теореме 3 раздела 1.3 $-f_0'(\hat{x}) \in N_Q(\hat{x})$. Теперь доказываемое утверждение следует из данного в предшествующем пункте описания конуса $N_Q(\hat{x})$.▶

Теорема 3. *Пусть $f_0, f_i : U \to \mathbb{R}$ – выпуклые функции, дифференцируемые в точке $\hat{x} \in Q$. Пусть существуют такие неотрицательные числа $\hat{\lambda}_i \, (i \in I))$, что имеют место соотношения (6),(7). Тогда $\hat{x}$ – решение задачи (4),(5).*

◀ Функция

$$g(x) = f_0(x) + \sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i f_i(x)$$

выпукла как неотрицательная линейная комбинация выпуклых функций. Условие (6) означает, что $\hat{x}$ – экстремаль функции g. Так как g выпуклая функция, то $\hat{x}$ реализует абсолютный минимум функции g на множестве U. Следовательно, $g(x) \geqslant g(\hat{x}) \, \forall x \in U$, т. е.

$$f_0(x) + \sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i f_i(x) \geqslant f_0(\hat{x}) + \sum_{i \in I} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = f_0(\hat{x}) \, \forall x \in U \, . \tag{8}$$

Если $x \in Q$, то $f_i(x) \leqslant 0 \; \forall i \in I$, поэтому (8) влечёт неравенство $f_0(x) \geqslant f_0(\hat{x}) \; \forall x \in Q$.▶

Хорошо известны варианты теоремы Куна-Таккера, применимые и к недифференцируемым функциям (см., например, [4], [9], [11], [12], [14], [15] – [18] и приведённую там литературу). Как видно из доказательства теоремы 3, её утверждение справедливо без условия Слейтера, а если постулировать неравенство (8), то можно обойтись и без дифференцируемости функций f_0, f_i.

3. Теорема Фаркаша. Пусть $l_i \, (i \in I)$ – конечная система линейных функционалов на пространстве $\mathbb{R}^n$, $Q_0 := \{x \in \mathbb{R}^n, \, l_i(x) \leqslant 0\}$ – множество решений однородной системы линейных неравенств

$$l_i(x) \leqslant 0 \quad (i \in I). \tag{9}$$

Поскольку $0 \in Q_0$, то Q_0 – непустое множество. Если l – линейный функционал на $\mathbb{R}^n$ и $l(x) \leqslant 0 \, \forall x \in Q_0$, то линейное однородное неравенство

$$l(x) \leqslant 0 \tag{10}$$

называют неравенством-следствием системы неравенств (9).

Теорема 4 . *Неравенство (10) есть следствие системы неравенств (9) в том и только в том случае, когда функционал l есть неотрицательная линейная комбинация системы функционалов $l_i \, (i \in I)$, т. е. $l \in \operatorname{con}\{l_i\}_{i \in I}$.*

◀ В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Действительно, если $l \in \mathrm{con}\{l_i\}_{i\in I}$, то (10) следует из (9). Нетривиально обратное утверждение: если (10)– неравенство – следствие системы неравенств (9), то функционал l есть неотрицательная линейная комбинация системы функционалов $l_i\,(i \in I)$.

Не уменьшая общности, можно считать, что $l_i(x) = (a_i, x)\,(i \in I)$, а $l(x) = (a, x)$, где $a_i, a \in \mathbb{R}^n$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что элемент a принадлежит конической оболочке K системы $a_i\,(i \in I)$. Предположим противное, т. е. $a \notin K$. Ранее доказывалось (см. раздел 1.3, лемма 2), что K есть выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. Если $a \notin K$, то согласно теореме отделимости существует вектор p из $\mathbb{R}^n$, для которого

$$(p, a) > \max_{x\in K}(p, x); \tag{11}$$

можно взять, например, $p = a-b$, где b – проекция a на конус K. Правая часть (11) равна 0. В самом деле, если бы для некоторого x_1 из K имело место неравенство $(p, x_1) > 0$, то $(p, tx_1) \to \infty$ при $t \to \infty$. Следовательно,

$$(p, a) > \max_{x\in K}(p, x) = 0 \geqslant (p, a_i)\ (i \in I).$$

В частности, $p \in Q$, однако $l(p) = (p, a) > 0$. Противоречие.▶

Первоначальное доказательство теоремы, данное венгерским математиком Фаркашем, не опиралось на теорему отделимости и было чисто алгебраическим. Подобный подход имеет свои преимущества. Например, он позволяет распространить теорию линейных неравенств на произвольные упорядоченные поля.

4. Конус опорных функционалов к полиэдру. Пусть $l_i\,(i \in I)$ – система линейных функционалов на пространстве $\mathbb{R}^n$, $h_i\,(i \in I)$ – действительные числа, $|I| < \infty$, т. е. I – конечное множество индексов. Множество $Q := \{x \in \mathbb{R}^n, l_i(x) \leqslant h_i,\ i \in I\}$ называют полиэдром в пространстве $\mathbb{R}^n$. Оно является пересечением конечного числа полупространств P_i, определяемых сотношениями $P_i := \{x \in \mathbb{R}^n,\ l_i(x) \leqslant h_i\}$, считаем, что $l_i \neq 0$. Сопоставим точке z из Q множество $I(z) := \{i \in I,\ l_i(z) = h_i\}$ – совокупность индексов i, соответствующих жёстким ограничениям.

Теорема 5. *Конус $N_Q(z)$ опорных функционалов к полиэдру Q в точке z совпадает с конической оболочкой множества $l_i\,(i \in I(z))$, т. е.*

$$N_Q(z) = \mathrm{con}\{l_i\}_{i\in I(z)}. \tag{12}$$

◀ Пусть $z \in Q$, $l \in N_Q(z)$. Фиксируем элемент v, удовлетворяющий неравенствам $l_i(v) \leqslant 0\,\forall i \in I(z)$. При малых положительных t элемент $z+tv$ принадлежит Q. Действительно, если $i \in I(z)$, то $l_i(v) \leqslant 0$ и поэтому $l_i(z+tv) \leqslant l_i(z) \leqslant h_i\,\forall t > 0$. Если же $i \notin I(z)$, то $l_i(z) < h_i$ и неравенство $l_i(z+tv) \leqslant h_i$ выполняется при малых t. Так как $l \in N_Q(z)$, то $l(z) \geqslant l(x)\,\forall x \in Q$; в частности, $l(z+tv) \leqslant l(z)$ при малых $t > 0$. Отсюда следует, что $l(v) \leqslant 0$ для всех v, удовлетворяющих неравенствам $l_i(v) \leqslant 0\,(i \in I(z))$. В силу теоремы Фаркаша $l \in \mathrm{con}\{l_i\}_{i\in I(z)}$. Тем самым доказано включение $N_Q(z) \subset \mathrm{con}\{l_i\}_{i\in I(z)}$.

Установим противоположное включение. Пусть $l \in \mathrm{con}\{l_i\}_{i\in I(z)}$, т. е.

$$l = \sum_{i\in I(z)} \lambda_i l_i, \quad (\lambda_i \geqslant 0 \ \forall\, i \in I(z)).$$

Тогда для любого x из Q справедливы соотношения

$$l(x) = \sum_{i\in I(z)} \lambda_i l_i(x) \leqslant \sum_{i\in I(z)} \lambda_i h_i = \sum_{i\in I(z)} \lambda_i l_i(z) = l(z),$$

т. е. $l \in N_Q(z)$. ►

Теорема 5 аналогична теореме 1 и формально получается из неё, если положить $f_i(x) = l_i(x) - h_i\,(i \in I)$. Однако в предположениях теоремы 5 условие Слейтера не фигурирует.

Равенство $l(x) = h$ эквивалентно неравенствам $l(x) \leqslant h, -l(x) \leqslant -h$. Это даёт возможность распространить теорему 5 на случай, когда полиэдр задаётся не только неравенствами, но и равенствами. Именно, пусть непустое множество Q определено соотношениями

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n,\ l_(x) \leqslant h_i\ (i \in I),\ l_i(x) = h_i\ (i \in I_0), \tag{13}$$

в котором I, I_0 – конечные непересекающиеся подмножества натуральных чисел, l_i – линейные функционалы на $\mathbb{R}^n$, $h_i \in \mathbb{R}$, $(i \in I \cup I_0)$.

Теорема 6. *Пусть $z \in Q$, $N_Q(z)$ – конус опорных функционалов к полиэдру Q в точке z. Тогда $N_Q(z)$ состоит из линейных функционалов l, допускающих представление*

$$l = \sum_{i\in I\cup I_0} \lambda_i l_i\,,$$

где $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_i(l_i(z) - h_i) = 0\ \forall i \in I$.

◄ Теорема 6 следует из теоремы 5. ►

Условия на числа λ_i аналогичны предположениям о множителях Лагранжа (см. 1.2).

5. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. В этом пункте рассматривается задача минимизации функции $f_0 : U \to \mathbb{R}$ на определяемом соотношениями (13) полиэдре $Q \subset U$. Её запись стандартна :

$$f_0(x) \to \min, \tag{14}$$

$$l_i(x) \leqslant h_i \quad (i \in I), \quad l_i(x) = h_i \quad (i \in I_0), \quad (x \in U). \tag{15}$$

Задача (14),(15) есть частный случай задачи, рассмотренной в разделе 1.2, возникающей при $f_i(x) = l_i(x) - h_i$. Поэтому к задаче (14),(15) применимо правило множителей Лагранжа. Однако специфика линейных ограничений (ср. с п. 2 настоящего раздела) позволяет усилить правило множителей в двух направлениях. Во-первых, в задаче (14),(15) можно множитель Лагранжа $\hat{\lambda}_0$ взять равным 1, во-вторых, если функция f_0 выпукла, то правило множителей Лагранжа оказывается не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

Сформулируем и докажем соответствующие результаты.

Теорема 7. *Пусть $\hat{x}$ – локальное решение задачи (14),(15) и функция f_0 дифференцируема в этой точке. Тогда найдутся такие числа $\hat{\lambda}_i$, $i \in I \cup I_0$, что справедливы соотношения*

$$f_0'(\hat{x}) + \sum_{i \in I \cup I_0} \hat{\lambda}_i l_i = 0, \tag{16}$$

$$\hat{\lambda}_i \geqslant 0, \quad \hat{\lambda}_i(l_i(\hat{x}) - h_i) = 0 \quad (i \in I). \tag{17}$$

◀ Так как $\hat{x}$ – локальное решение задачи (14),(15), то $-f_0'(\hat{x}) \in N_Q(\hat{x})$. Теперь требуемый результат вытекает из теоремы 6.▶

Теорема 8. *Пусть $f_0 : U \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, $\hat{x} \in Q$, функция f_0 дифференцируема в точке $\hat{x}$ и выполнены соотношения (16),(17). Тогда $\hat{x}$ – решение задачи (14),(15).*

◀ Соотношения (16),(17) означают, что $0 \in f_0'(\hat{x}) + N_Q(\hat{x})$. Поскольку f_0 – выпуклая функция, то отсюда следует (см. теорему 3.4), что $\hat{x}$ – решение задачи (14),(15).▶

Теорема 8 применима в случае линейной функции f_0. Этот частный случай задачи (14),(15) называется задачей линейной оптимизации (линейного программирования). Задачу минимизации квадратичной формы при линейных ограничениях

$$f_0(x) = (Cx, x)/2 - (d, x) \to \min, \quad x \in Q \tag{18}$$

именуют задачей квадратичного программирования. Здесь C – симметричная матрица размеров $n \times n$, $d \in \mathbb{R}^n$. Функция $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла в том и только в том случае, когда $C \geqslant 0$. Если это предположение выполнено, то к задаче (18) применима теорема 8.

6. Максимизация выпуклой функции. Рассмотрим задачу максимизации

$$f(x) \to \max, \quad x \in X, \tag{19}$$

где X – выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$; f – выпуклая функция на множестве X. Задача (19), разумеется эквивалентна задаче минимизации функции $-f$ на X, но функция $-f$ является выпуклой лишь в случае её аффинности. Поэтому задача (19) нуждается в отдельном рассмотрении.

Как отмечалось выше, выпуклость множества A эквивалентна равенству $\mathrm{co}\, A = A$, а выпуклость функции $f : X \to \mathbb{R}$ равносильна выпуклости её надграфика $\mathrm{epi}\, f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, x \in X, z \geqslant f(x) \right\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Лемма 1. (Обобщённое неравенство Иенсена). *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, $x_i \in X$, $\lambda_i \geqslant 0\,(i = 1, \dots, m)$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$. Тогда имеет место неравенство*

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_m f(x_m).$$

◀ Из включения $\begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix} \in \operatorname{epi} f$ и выпуклости $\operatorname{epi} f$ следует, что

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \\ \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_m f(x_m) \end{pmatrix} \in \operatorname{epi} f\,.$$

В силу определения надграфика последнее включение эквивалентно обобщённому неравенству Иенсена.▶

Вернёмся к задаче (19). Множество $A \subset Q$ назовём остовом множества X, если $\operatorname{co} A = X$. Остов множества определяется неоднозначно. Ясно, например, что в качестве остова X можно взять всё множество X. Для дальнейшего желательно в качестве остова брать по возможности минимальное множество. Своеобразный принцип максимума выражает

Теорема 9. *Точная верхняя грань выпуклой функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве X совпадает с точной верхней гранью f на остове A множества X:*

$$\sup_X f = \sup_A f\,.$$

◀ Поскольку $A \subset X$, то

$$\sup_A f \leqslant \sup_X f\,.$$

Установим противоположное неравенство. Пусть $x \in X$. Тогда найдутся такие $\lambda_i \geqslant 0$, $x_i \in A$, $i = 1, \ldots, m$, что справедливы равенства

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \;\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\,.$$

Так как f – выпуклая функция, то

$$f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sup_A f = \sup_A f.$$

Ввиду произвольности x из X получаем

$$\sup_{x\in X} f(x) \leqslant \sup_A f\,. \blacktriangleright$$

Если точная верхняя грань функции f на множествах A, X достигается, то в теореме 9 можно заменить sup на max. Именно так обстоит дело, если множества A, X компактны, а функция f непрерывна на множестве X.

Возникает вопрос: какие точки выпуклого множества входят в любой его остов, а какие нет? Существенную роль здесь начинают играть крайние точки. Напомним необходимые определения.

Элемент x из X называют промежуточной точкой выпуклого множества X, если x есть середина отрезка положительной длины, концы которого принадлежат множеству Q. Ясно, например, если X – открытое выпуклое множество, то все его точки являются промежуточными. Бывают и замкнутые выпуклые множества, все точки которых промежуточны. Примером может служить полоса $\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \ 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$. Точку x выпуклого множества X именуют крайней, если она не является промежуточной точкой этого множества. Например, вершины плоского треугольника – его крайние точки.

Лемма 2. *Если элемент w реализует абсолютный минимум строго выпуклой на выпуклом множестве X функции f, то w – крайняя точка множества X.*

◀ Преположим противное, т.е. w – промежуточная точка множества X. Тогда $w = \frac{1}{2}(u+v)$, где $u \neq v, u \in X, v \in X$. Поскольку функция f строго выпукла, то

$$f(\frac{u+v}{2}) < \frac{f(u)+f(v)}{2}\,.$$

Из этого неравенства вытекает, что хотя бы одно из чисел $f(u), f(v)$ больше $f(w)$. Однако в условиях леммы w реализует абсолютный минимум функции f. Противоречие. ▶

Строго выпуклая функция $f(x) = |x|^2$ достигает своего максимума на любом компакте $X \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому у любого выпуклого компакта существуют крайние точки. Более того, множество ext X крайних точек достаточно обширно и характеризует множество X в следующем смысле: co ext $X = X$. Доказательство этого принципиально важного в оптимизационных задачах утверждения можно найти, например, в [1], [4], [6], [9] – [12], [14] – [18].

Множество крайних точек выпуклого множества X входит в любой его остов, в случае компактности X оно представляет минимальный остов. В некоторых случаях множество ext X допускает простое описание. Например, если $\Diamond$ – октаэдр в $\mathbb{R}^n$, определяемый равенством

$$\Diamond := \{x = (x_1 \ldots x_n)^T, \ \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant 1\},$$

то ext $\Diamond = \{\pm e_i \, i = 1, \ldots, n\}$ – совокупность единичных векторов, направленных вдоль координатных осей. Для куба

$$\square := \{x = (x_1 \ldots x_n)^T, \ |x_i| \leqslant 1\}$$

соответствующее множество крайних точек ext $\square$ содержит 2^n элементов вида $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)^n$, где $\alpha_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Задача 1. *Доказать включение* ext co $A \subset A$.

Задача 2. *Пусть*

$$Q := \{(x_1 \ldots x_n)^T \in \Diamond, \sum_{j=1}^{n} x_j = 0.\}$$

Доказать равенство

$$\operatorname{ext} Q = \{\frac{e_i - e_j}{2}, \ i, j = 1, \ldots, n; i \neq j\}.$$

Вопрос об алгебраическом описании множества крайних точек полиэдров обсуждается далее (см. гл. 2).

1.5 Теоремы об очистке

1. Первая теорема об очистке. Рассматривается задача выпуклой оптимизации

$$f_0(x) \to \min\,, \tag{1}$$

$$f_i(x) \leqslant 0, \quad (i \in I,\, x \in U)\,. \tag{2}$$

Здесь U – открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, $f_i : U \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ – выпуклые функции. Предполагается, что решение $\hat{x}$ задачи (1),(2) существует, функции $f_i\,(i \in I)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$, функция f_0 дифференцируема в точке $\hat{x}$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие Слейтера. Тогда существует такое подмножество I_+ множества I, что 1) $\hat{x}$ реализует абсолютный минимум функции f_0 при условиях*

$$f_i(x) \leqslant 0, \quad (i \in I_+,\, x \in U)\,. \tag{2_+;}$$

2)$f_i(\hat{x}) = 0$ $(i \in I_+)$; 3) производные $f_i'(\hat{x})$ $(i \in I_+)$ образуют линейно независимую систему.

◀ Применим теорему 2 раздела 1.4, согласно которой существуют такие неотрицательные числа $\hat{\lambda}_i$ $(i \in I)$, что справедливы равенства

$$f_0(\hat{x}) + \sum_{i\in I} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0, \tag{3}$$

$$\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0 \quad (i \in I). \tag{4}$$

Из (4) следует, что если $f_i(\hat{x}) < 0$, то $\hat{\lambda}_i = 0$. Заменяя в случае необходимости множество I более узким множеством, можно считать, что в (3),(4) $\hat{\lambda}_i > 0$, $f_i(\hat{x}) = 0$. Согласно лемме Каратеодори существует такое множество $I_+ \subset I$, что

$$1) - f_0'(\hat{x}) = \sum_{i\in I_+} \mu_i f_i'(\hat{x});$$

2)$\mu_i > 0$; $(i \in I_+)$3) векторы $f_i'(\hat{x})$ $(i \in I_+)$ образуют линейно независимую систему. Множество I_+ является искомым. Действительно, справедливы соотношения

$$f_0'(\hat{x}) + \sum_{i\in I_+} \mu_i f_i(\hat{x}) = 0, \tag{3_+}$$

$$\mu_i > 0, \mu_i f_i(\hat{x}) = 0.\ (i \in I_+) \tag{4_+}$$

Из (3),(4_+) и теоремы 3 раздела 1.4 вытекает, что $\hat{x}$ есть решение задачи (1),(2_+). Другие утверждения теоремы очевидны. ▶

Теорема 1 означает, что решение задачи (1),(2) является решением аналогичной ей задачи (1),(2_+), но с меньшим числом ограничений; при этом $|I| \leqslant n$, т. е. число новых ограничений не превосходит n. Это замечание отчасти проясняет смысл термина «очистка» (отбрасывание некоторых ограничений). Условие гладкости функций f_i на самом деле излишне ; его появление связано лишь с методом доказательства, а не с существом вопроса.

2. Вторая теорема об очистке. Рассматривается задача на минимакс

$$f(x) = \max_{i \in I} f_i(x) \to \min,\ x \in X. \tag{5}$$

Здесь X – открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, I – конечное подмножество множества натуральных чисел ($I \subset \mathbb{N}$). Для задачи (5) в разделе 1.2 п. 5 введены понятия решения и локального решения; сформулированы необходимые условия локального минимума (теорема 8 раздела 1.2). В случае выпуклых функций f_i $(i \in I)$ соответствующие условия оказываются достаточными. Более точно, имеет место

Лемма 1. *Пусть функции $f_i : X \to \mathbb{R}$ выпуклы, дифференцируемы в некоторой точке $\hat{x} \in X$ и $J(\hat{x}) := \{i \in I, f_i(\hat{x}) = f(\hat{x})\}$. Пусть существуют такие неотрицательные числа μ_j ($j \in J(\hat{x})$, что*

$$\sum_{j \in J(\hat{x})} \mu_j f_j'(\hat{x}) = 0,\ \sum_{j \in J(\hat{x})} \mu_j = 1. \tag{6}$$

Тогда $\hat{x}$ есть решение задачи (5).

◀ Первое из равенств (6) означает, что $\hat{x}$ минимизирует функцию

$$\sum_{j \in J(\hat{x})} \mu_j f_j(x) \tag{7}$$

на множестве X. Теперь имеем последовательно (пояснения ниже)

$$f(x) = \sum_{j \in J(\hat{x})} \mu_j f(x) \geqslant \sum_{j \in J(\hat{x})} \mu_j f_j(x) \geqslant \sum_{j \in J(\hat{x})} \mu_j f_j(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

Комментарий к цепи соотношений: вначале используется второе из соотношений (6), далее оценка $f(x) \geqslant f_j(x)$, затем то, что элемент $\hat{x}$ минимизирует функцию (7), и, наконец, применяются равенства $f_j(\hat{x}) = f(\hat{x})\ \forall j \in J(\hat{x})$. ▶

Теорема 2. *Пусть функции $f_i : X \to \mathbb{R}$, $(i \in I)$ выпуклы, решение $\hat{x}$ задачи (5) существует и функции f_i непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$.*

Тогда найдётся множество $I_+ \subset J(\hat{x}) := \{i \in I, f_i(\hat{x}) = f(\hat{x})\}$, содержащее не более чем $n+1$ элементов и такое, что $\hat{x}$ является решением задачи

$$\max_{i \in I_+} f_i(x) \to \min, \quad (x \in X); \tag{5_+}$$

◀ В силу теоремы 8 раздела 1.2 найдутся такие числа $\mu_j \geqslant 0$, $j \in J(\hat{x})$, что

$$(0,\ 1) = \sum_{j \in J(\hat{x})} \mu_j (f_j'(\hat{x}), 1).$$

Согласно лемме Каратеодори существуют множество $I_+ \subset J(\hat{x})$ и числа $\nu_i \geqslant 0$ ($i \in I_+$) такие, что

$$(0,\ 1) = \sum_{i \in I_+} \nu_i (f_i'(\hat{x}), 1), \tag{8}$$

множество I_+ содержит не более чем $n+1$ элемент. Равенство (8) означает, что $\hat{x}$ есть решение задачи (5_+). ►

3. Чебышёвский радиус компакта. Пусть A – компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Замкнутый шар $B(x,r) = x + rB$ радиуса r с центром в точке x содержит множество A, если $r \geqslant |x-a|$ $\forall a \in A$. Положим $g(x) := \max\{|x-a|, a \in A\}$; очевидно, $g(x)$ есть наименьший из радиусов шаров с центром в точке x, содержащих множество A. Функция $g(x)$ определена и непрерывна на всём пространстве $\mathbb{R}^n$. Из оценки $g(x) \geqslant |x-a|$ $(a \in A)$ вытекает ограниченность всех её нижних лебеговых множеств. Поэтому функция $g(x)$ достигает на $\mathbb{R}^n$ своего минимального значения в некоторой точке $\hat{x}$. Число $g(\hat{x})$ совпадает с наименьшим из радиусов шаров, содержащих множество A. Оно называется чебышёвским радиусом компакта A и обозначается символом $\mathscr{R}(A)$. Таким образом,

$$\mathscr{R}(A) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{x \in A} |x-a|\,,$$

а элемент $\hat{x}$ есть решение задачи на минимакс

$$g(x) = \max_{a \in A} |x-a| \to \min\,. \tag{9}$$

Отметим следующие свойства чебышёвского радиуса :

1) если $A_1 \subset A_2$, то $\mathscr{R}(A_1) \leqslant \mathscr{R}(A_2)$ (монотонность);

2) $\mathscr{R}(B) = 1$ (нормировка);

3)$\mathscr{R}(A + \delta B) \leqslant \mathscr{R}(A) + \delta$ (непрерывность); здесь $A + \delta B := \{z = a + \delta v, a \in A,\, v \in B\}$.

Остановимся на доказательстве последнего свойства. Пусть $A \subset B(\hat{x}, \mathscr{R}(A))$. Тогда $A + \delta B \subset B(\hat{x}, \mathscr{R}(A) + \delta)$. Отсюда и вытекает требуемое свойство.

Последовательность A_i компактных подмножеств A назовём сходящейся к A, если $A \subset A_i + \delta_i B$, где $\delta_i \to 0$ при $i \to \infty$; будем писать $A_i \uparrow A$. Из свойств 1–3 вытекает

Лемма 2. *Если $A_i \uparrow A$, то $\mathscr{R}(A_i) \to \mathscr{R}(A)$.*

◄ Действительно, $\mathscr{R}(A) - \delta_i \leqslant \mathscr{R}(A_i) \leqslant \mathscr{R}(A)$. Поскольку $\delta_i \to 0$, то всё доказано.►

Лемма 3. *Для любого компактного множества A существует последовательность его конечных подмножеств $A_i \uparrow A$.*

◄ Предлагается доказать самостоятельно.►

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{R}(A)$ есть чебышёвский радиус компакта $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда найдётся такое конечное подмножество A^+ множества A, что $\mathscr{R}(A) = \mathscr{R}(A^+)$ и $|A^+| \leqslant n+1$, т. е. число элементов A^+ не превосходит $n+1$.*

◄ Вначале изучим случай, когда A – конечное множество. Функции $f_a(x) = |x-a|^2$ $(a \in A)$ выпуклы и дифференцируемы на всём пространстве $\mathbb{R}^n$: $\nabla f_a(x) = 2(x-a)$. Рассмотрим задачу на минимакс

$$f(x) = \max_{a \in A} |x-a|^2 \to \min\,. \tag{10}$$

Как нетрудно видеть, задача (10) имеет решение $\hat{x}$; при этом $f(\hat{x}) = \mathscr{R}^2(A)$, $\hat{x}$ – центр шара минимального радиуса, содержащего A. Согласно второй теореме об очистке существует множество $A^+ \subset A, |A^+| \leqslant n+1$ такое, что $\hat{x}$ есть решение задачи на минимакс

$$f^+(x) = \max_{a \in A^+} |x-a|^2 \to \min, \tag{10^+}$$

следовательно, $\mathscr{R}(A^+) = \mathscr{R}(A)$.

Пусть теперь A – произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$. Построим последовательность $A_i \uparrow A$, $|A_i| < \infty$. Согласно лемме 2 $\mathscr{R}(A_i) \to \mathscr{R}(A)$ при $i \to \infty$. В силу уже доказанного существует множество A_i^+, обладающее свойствами $A_i^+ \subset A_i$, $|A_i^+| \leqslant n+1$, $\mathscr{R}(A_i^+) = \mathscr{R}(A_i)$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность A_i^+ сходится к множеству A^+, состоящему не более чем из $n+1$ элементов. При этом

$$\mathscr{R}(A^+) = \lim_{i\to\infty} \mathscr{R}(A_i^+) = \lim_{i\to\infty} \mathscr{R}(A_i) = \mathscr{R}(A).$$

Искомое множество построено.▶

4. Неравенство Юнга. Пусть A – компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$. Число $\mathscr{D}(A) := \max\{|x-y|, x \in A, y \in A\}$ называют диаметром компакта A. Диаметр $\mathscr{D}(A)$, как и чебышёвский радиус $\mathscr{R}(A)$, характеризует размеры множества A. Нетрудно установить оценку

$$\mathscr{R}(A) \leqslant \mathscr{D}(A) \leqslant 2\mathscr{R}(A). \tag{11}$$

Действительно, из определения чебышёвского радиуса $\mathscr{R}(A)$ вытекает включение $A \subset B(x, \mathscr{R}(A))$, где x – некоторая точка из $\mathbb{R}^n$. Поэтому диаметр $\mathscr{D}(A)$ не превосходит диаметра шара $B(x, \mathscr{R}(A))$, равного $2\mathscr{R}(A)$, что и доказывает правое из неравенств (11).

Если $a \in A$, то $|a-x| \leqslant \mathscr{D}(A) \forall x \in A$, поэтому $A \subset B(a, \mathscr{D}(A))$. Отсюда вытекает неравенство $\mathscr{R}(A) \leqslant \mathscr{D}(A)$.

Правое из неравенств (11) неулучшаемо, поскольку если A – шар, то $\mathscr{D}(A) = 2\mathscr{R}(A)$. Левое из неравенств (11) допускает усиление вида

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\mathscr{R}(A) \leqslant \mathscr{D}(A), \tag{12}$$

называемое неравенством Юнга. Его доказательство проводится в два этапа. Первый этап составляет

Лемма 4. *Неравенство (12) верно для каждого множества A, содержащего не более чем $n+1$ элемент.*

◀ Доказательство проведём при $n = 2, |A| = 3$. В этом случае A содержит три точки M_1, M_2, M_3, образующие треугольник $M_1M_2M_3$, диаметр A совпадает с наибольшей из сторон треугольника. Пусть (для определённости) $\mathscr{D}(A) = |M_1M_2|$. Если $\angle M_3 \geqslant \pi/2$, то $\mathscr{D}(A) = 2\mathscr{R}(A)$, следовательно, $\mathscr{D}(A) \geqslant \sqrt{3}\mathscr{R}(A)$. Если $\angle M_3 < \pi/2$, то $M_1M_2M_3$ – остроугольный треугольник, поэтому один из его углов будет заключён в промежутке $[\pi/3, \pi/2)$. Синус этого угла $\sin\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Радиус R окружности, описанной около треугольника $M_1M_2M_3$, удовлетворяет соотношениям $2R\sin\alpha = |M_iM_j| \leqslant \mathscr{D}(A)$, поэтому $\mathscr{D}(A) \geqslant \sqrt{3}\mathscr{R}(A)$.

Случай $n > 2$ рассматривается аналогично, однако выкладки здесь более громоздки. ▶

Лемма 5. *Неравенство Юнга справедливо для любого компакта* $A \subset \mathbb{R}^n$.

◀ В силу теоремы 3 для компакта A найдётся конечное подмножество A^+ такое, что $|A| \leqslant n+1, \mathscr{R}(A^+) = \mathscr{R}(A)$. Требуемое неравенство вытекает из цепи соотношений $\mathscr{D}(A) \geqslant \mathscr{D}(A^+) \geqslant k_n\mathscr{R}(A^+) = k_n\mathscr{R}(A)$, в которых $k_n = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$ – постоянная Юнга.▶

Неравенство Юнга становится равенством, если A – правильный симплекс.

5. Опорная функция и ширина множества. Каждому непустому ограниченному множеству $Q \subset \mathbb{R}^n$ можно сопоставить функцию $sQ(x) = \sup\{(x,y),\, y \in Q\}$, $(x \in Q)$, называемую опорной функцией множества Q. Опорная функция единичного шара $B := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leqslant 1\}$ определяется равенством $sB(x) = |x|$. Если $Q = a + \rho B\, (\rho \geqslant 0)$, то $sQ(x) = (x,a) + \rho|x-a|$.

Функцию $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ именуют сублинейной, если она обладает свойствами:

1) положительная однородность

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \;\forall x \in \mathbb{R}^n,\; \lambda \geqslant 0,$$

2) субаддитивность

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \;\forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Совокупность всех сублинейных функций, определённых на $\mathbb{R}^n$, обозначим через $P(\mathbb{R}^n)$.

Оказывается, класс $P(\mathbb{R}^n)$ состоит из опорных функций выпуклых компактов. Обозначим через $Kv(\mathbb{R}^n)$ совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Каждому выпуклому компакту K сопоставим его опорную функцию sK. Тем самым вводится отображение $s : Kv(\mathbb{R}^n) \to P(\mathbb{R}^n)$.

Теорема Фенхеля. *Отображение* $s : Kv(\mathbb{R}^n) \to P(\mathbb{R}^n)$ *есть биекция, т. е. существует обратное к нему отображение* $\partial : P(\mathbb{R}^n) \to Kv(\mathbb{R}^n)$, *обладающее свойствами*

$$\partial sK = K \quad (K \in Kv(\mathbb{R}^n)), \quad s\partial p = p \quad (p \in P(\mathbb{R}^n)).$$

Не останавливаясь на доказательстве теоремы Фенхеля, опишем способ определения отображения ∂ и отметим некоторые свойства отображений s, ∂. Отображение ∂ определяется равенством

$$\partial p := \{x \in \mathbb{R}^n,\; (x,v) \leqslant p(v) \;\forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Если Q, Q_1, Q_2 – подмножества $\mathbb{R}^n$, λ – действительное число, то множества $\lambda Q := \{\lambda x,\, x \in Q, \quad Q_1 + Q_2 := \{x_1 + x_2, x_1 \in Q_1, x_2 \in Q_2\}$ называют произведением Q на число λ и алгебраической суммой множеств Q_1 и Q_2 соответственно. Взаимное расположение непустых множеств Q_1, Q_2 из $\mathbb{R}^n$ можно охарактеризовать числами

$$\theta(Q_1, Q_2) = \inf\{t > 0, Q_1 \subset Q_2 + tB\},$$

$$h(Q_1, Q_2) = \max\{\theta(Q_1, Q_2), \theta(Q_2, Q_1)\}.$$

Используется терминология : $\theta(Q_1, Q_2)$ – уклонение множества Q_1 от множества Q_2; $h(Q_1, Q_2)$ – хаусдорфово расстояние между множествами Q_1, Q_2. Справедливы соотношения

$$s(Q_1 + Q_2) = sQ_1 + sQ_2, \quad s(\lambda Q) = \lambda sQ, \ (\lambda \geqslant 0)$$

$$h(Q_1, Q_2) = \sup_{|v|=1} |sQ_1(v) - sQ_2(v)|,$$

означающие, в частности, что отображение $s : Kv(\mathbb{R}^n) \to P(\mathbb{R}^n)$ не только взаимно однозначно, но и в определённом смысле линейно и непрерывно.

Сопоставим каждому элементу u из $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n, \, |x| = 1\}$ и действительным числам $h_1 \leqslant h_2$ полосу $\Pi(u, h_1, h_2) := \{x \in \mathbb{R}^n, \, h_1 \leqslant (x, u) \leqslant h_2\}$. Таким образом, $\Pi(u, h_1, h_2)$ есть часть пространства $\mathbb{R}^n$, расположенная между гиперплоскостями $\Gamma(u, h_i) = \{x \in \mathbb{R}^n, (x, u) = h_i\} \, (i = 1, 2)$. Расстояние между этими гиперплоскостями равно $h_2 - h_1$; оно называется шириной полосы $\Pi(u, h_1, h_2)$.

Лемма 6. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда включение*

$$M \subset \Pi(u, h_1, h_2) \tag{13}$$

эквивалентно неравенствам

$$h_2 \geqslant sM(u), \qquad -h_1 \geqslant sM(-u), \tag{14}$$

где sM – опорная функция множества M.

◀ Если выполнено (13), то

$$sM(u) = \sup\{(x, u), x \in M\} \leqslant h_2,$$

$$sM(-u) = \sup\{(x, -u), x \in M\} = -\inf\{x, u), x \in M\} \leqslant -h_1$$

и таким образом выполнены неравенства (14). Обратно, пусть имеют место неравенства (14). Тогда для любого x из M справедливы соотношения $h_2 \geqslant sM(u) \geqslant (x, u) \geqslant -sM(-u) \geqslant h_1$, означающие, что $u \in \Pi(u, h_1, h_2)$.▶

Из неравенства (14) вытекает, что среди полос, содержащих M, имеется наименьшая по ширине. Ширина самой узкой полосы $\Pi(u, h_1, h_2)$, содержащей M, называется шириной M в направлении u и обозначается символом $b_M(u)$. Согласно лемме 6 $b_M(u) = sM(u) + sM(-u)$. Как нетрудно видеть, $b_M(u) = b_{\text{co}\, M}(u)$, равенство $b_M(u) = 0$ для некоторого u из ∂B означает, что M содержится в гиперплоскости $\Gamma(u, h)$. Для того чтобы исключить из рассмотрения вырожденные ситуации в дальнейшем, предполагаем, что

$$M \in \, Kv(\mathbb{R}^n), \quad \overset{\circ}{M} \neq \varnothing \tag{15}$$

Предположения (15) гарантируют неравенства $0 < \, b_M(u) \, < \, \infty$.

Число

$$\Delta(M) = \min_{u \in \partial B} b_M(u)$$

называют толщиной M. Оно совпадает с шириной самой узкой полосы, содержащей множество M.

Задача 1. *Доказать равенство*

$$\mathscr{D}(M) = \max_{u \in \partial B} b_M(u).$$

Функция b_M чётна ($b_M(-u) = b_M(u) \, \forall u \in \partial B$). Это даёт возможность применить мощные методы вариационного исчисления в целом. В частности, можно установить существование не менее n пар критических точек у функции $b_M : \partial B \to \mathbb{R}$. В геометрической форме этот результат приведён в [10], аналитическая трактовка содержится в [3].

6. Неравенство Бляшке. Выпуклый телесный компакт M содержит шары положительного радиуса. Шар наибольшего радиуса, целиком содержащийся в компакте M, называется вписанным шаром. Существование вписанного шара может быть доказано с помощью стандартных рассуждений, основанных на компактности. Радиус шара, вписанного в M, обозначим через $\rho(M)$. Ниже будет использоваться геометрически очевидная

Лемма 7. *1) Если M_1, M_2 – выпуклые телесные компакты и $M_1 \subset M_2$, то $\rho(M_1) \leqslant \rho(M_2)$.*

2) Если M – телесный выпуклый компакт, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует многогранник Q, для которого $M \subset Q$, $\rho(Q) < \rho(M) + \varepsilon$.

Не останавливаясь на доказательстве, заметим, что в качестве Q можно взять множество

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n, \ (x, u_i) \leqslant sM(u_i), \ i \in I\},$$

где $u_i \in \partial B, \ i \in I, \ |I| < \infty$, множество $\{u_i\}$ достаточно густо расположено на сфере ∂B.

Положим $h_i = sM(u_i)$, $\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^n, \ (x, u_i) = h_i\}$, $\quad Q_i = \{x \in \mathbb{R}^n, (x, u_i) \leqslant h_i\}$ $(i \in I)$. Включение $B(x,t) \subset Q_i$ $(t \geqslant 0)$ эквивалентно неравенству $t \leqslant h_i - (x, u_i) = \operatorname{dist}(x, \Gamma_i)$, поэтому шар $B(x,t)$ содержится в Q, если и только если $t \leqslant h_i - (x, u_i) \ \forall i \in I$. Отсюда легко следует, что число $-\rho(Q)$ совпадает с минимальным значением функции

$$f(x) = \max_{i \in I}((x, u_i) - h_i)$$

на пространстве $\mathbb{R}^n$. В силу второй теоремы об очистке найдётся множество $I_+ \subset I, \ |I_+| \leqslant n + 1$ такое, что минимальное значение функции

$$f_+(x) = \max_{i \in I_+}((x, u_i) - h_i)$$

на пространстве $\mathbb{R}^n$ также равно $-\rho(Q)$. В частности, если

$$Q_+ = \bigcap_{i \in I_+} Q_i,$$

то $Q \subset Q_+$ и $\rho(Q) = \rho(Q_+)$. Не уменьшая общности, можно считать множество Q_+ ограниченным ; в рассматриваемом случае симплексом. Напомним, что симплексом в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка $n+1$ элементов из $\mathbb{R}^n$, не принадлежащих одной гиперплоскости. Из проведённых рассуждений вытекает

Лемма 8. *Если M – телесный выпуклый компакт, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся содержащий M симплекс Q_+ такой, что $\rho(Q_+) < \rho(M) + \varepsilon$.*

Неравенством Бляшке называют оценки вида

$$2\rho(M) \leqslant \Delta(M) \leqslant (n+1)\rho(M), \tag{16}$$

где $\Delta(M)$ – толщина телесного выпуклого компакта M, $\rho(M)$ – радиус вписанного в M шара. Левая часть (16) очевидна. Действительно, если $B(x,\rho) \subset M$, то $\Delta(M) \geqslant \Delta(B(x,\rho)) = 2\rho$, что и приводит при $\rho = \rho(M)$ к нужному результату.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём симплекс Q_+, удовлетворяющий условиям $M \subset Q_+$, $\rho(Q_+) \leqslant \rho(M) + \varepsilon$ (см. лемму 8). n- мерный объём V симплекса Q_+ может быть вычислен по формулам

$$V = \frac{1}{n} S_0 h_0 = \frac{1}{n} S \rho(Q_+), \tag{17}$$

где $S_0 - -(n-1)-$ мерный объём какой-либо грани, h_0 – длина высоты симплекса, опущенная на эту грань, S – сумма $(n-1)$-мерных объёмов всех боковых граней, $\rho(Q_+)$ – радиус вписанного в Q_+ шара. Из формулы (17) легко выводится, что толщина симплекса Q_+ совпадает с высотой h_0, опущенной на грань с наибольшим $(n-1)$-мерным объёмом S_0. Поскольку симплекс имеет $n+1$ грань, то $S \leqslant (n+1)S_0$. Используя снова (17), получаем $h_0 \leqslant (n+1)\rho(Q_+)$. Справедливы оценки

$$\Delta(M) \leqslant \Delta(Q_+) \leqslant (n+1)\rho(Q_+) \leqslant (n+1)(\rho(M) + \varepsilon),$$

из которых ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ следует правое из неравенств (16).

Константы 2 и $n+1$ в неравенстве (16) точны в том смысле, что существуют выпуклые компакты, для которых соответствующие неравенства становятся равенствами. Например, если M - шар, то $\Delta(M) = 2\rho(M)$; если M – правильный симплекс размерности n, то $\Delta(M) = (n+1)\rho(M)$. Оценки (16) верны и в случае нетелесного компакта M, так как в этом случае $\Delta(M) = \rho(M) = 0$.

7. Теорема Хелли. К теоремам об очистке близка теорема Хелли. Её доказательства и многочисленные применения хорошо известны.

Теорема 4. (Теорема Хелли). *Пусть A_i, $i \in I$ – семейство замкнутых выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, по крайней мере одно из которых компактно. Если любое подсемейство из $(n+1)$-го множества имеет непустое пересечение, то и всё семейство имеет непустое пересечение.*

◀ Пусть вначале $|I| < \infty$. Функции $f_i(x) := \operatorname{dist}^2(x, A_i)$ выпуклы и непрерывно дифференцируемы на пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. задачу 2 раздела 1.1 и задачу 2 раздела 1.3). Если A_{i_0} – компактное множество, то все нижние лебеговы множества функции f_{i_0} ограничены. Поэтому также ограничены нижние лебеговы множества функции $f(x) = \max\{f_i(x),\, i \in I\}$. Следовательно, функция f достигает своего минимума на $\mathbb{R}^n$ в некоторой точке $\hat{x}$. В силу второй теоремы об очистке найдётся множество I_+, содержащее не более $n+1$ элементов и такое, что $\hat{x}$ реализует минимум функции $f_+(x) = \max\{f_i(x),\ i \in I_+\}$ и $f(\hat{x}) = f(\hat{x})$. Поскольку $|I_+| \leqslant n+1$, то множества A_i $(i \in I_+)$ имеют общую точку, а минимальное значение функции f_+ на $\mathbb{R}^n$ равно 0. Следовательно, $f(\hat{x}) = f_+(\hat{x}) = 0$. Это эквивалентно доказываемому утверждению в случае $|I| < \infty$.

Пусть теперь I – бесконечное множество. Из доказанного выше вытекает, что система замкнутых подмножеств $A_i \cap A_{i_0}$ компакта A_{i_0} образует центрированную систему и, следовательно (см. предложение 2 раздела 1.1), имеет непустое пересечение.▶

Задача 2. *Вывести теорему 3 из теоремы Хелли.*

Задача 3. *Пусть* $A_1, \ldots, A_p$ $(p > n+1)$ *– выпуклые множества в* $\mathbb{R}^n$. *Доказать, что если каждые* $n+1$ *из них имеют общую точку, то все эти множества имеют общую точку (один из многочисленных вариантов теоремы Хелли).*

Глава 2

Линейная оптимизация

2.1 Линейные неравенства и полиэдры

1. Совместные и противоречивые системы линейных неравенств. Рассмотрим систему линейных неравенств

$$(a_i, x) \leqslant h_i, \quad (i \in I). \tag{1}$$

Здесь I – конечное подмножество $\mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $h_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in I$. Систему (1) называют совместной, если множество её решений

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n,\ (a_i, x) \leqslant h_i\ \forall\ i \in I\} \tag{2}$$

непусто, и противоречивой, если $Q = \varnothing$. Линейное неравенство

$$(a, x) \leqslant h \tag{3}$$

именуем неотрицательной линейной комбинацией системы неравенств (1), если найдутся такие неотрицательные числа λ_i $(i \in I)$, что

$$a = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i,\ h = \sum_{i \in I} \lambda_i h_i.$$

Очевидно, что каждое решение системы (1) является решением неравенства (3). В частности, если, например, (3) – противоречивое неравенство ($a = 0$, $h < 0$), то и система (1) также противоречива. Нетривиален обратный факт.

Теорема 1. *Система неравенств (1) противоречива в том и только в том случае, если некоторая их неотрицательная линейная комбинация есть противоречивое неравенство.*

◀ Пусть система неравенств (1) противоречива. В этом случае система однородных неравенств

$$(a_i, x) - th_i \leqslant 0 \quad (i \in I) \tag{4}$$

(относительно переменных $x_1, \ldots, x_n, t$) влечёт за собой неравенство

$$t \leqslant 0. \tag{5}$$

Действительно, в предположении противного найдётся пара $\bar{x}, \bar{t}$, удовлетворяющая системе (4) и такая, что $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{t} > 0$. Но тогда система неравенств (1) имеет решение $x = \bar{x}/\bar{t}$, что противоречит условию $Q = \varnothing$.

Поскольку (5) – это следствие системы (4), то согласно теореме Фаркаша неравенство (5) есть неотрицательная линейная комбинация неравенств (4). Это приводит к соотношениям

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0, \quad \sum_{i \in I} \lambda_i h_i = -1 \tag{6}$$

Обратная импликация очевидна: (6) влечёт за собой противоречивость системы неравенств (1). ►

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Для того чтобы определяемое равенством (2) множество Q было непустым, необходимо и достаточно, чтобы из соотношений*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0, \quad \lambda_i \geqslant 0 \ (i \in I)$$

вытекало неравенство

$$\sum_{i \in I} \lambda_i h_i \geqslant 0.$$

Множество Q вида (2) называем далее полиэдром. Оно представляет пересечение конечного числа полупространств, выпукло и замкнуто. Ряд свойств полиэдров изучен в 1.4. Ниже приводится алгебраическая характеристика крайних точек полиэдров, устанавливаются признаки ограниченности, обсуждается вопрос о структуре неограниченных полиэдров и рассматриваются важные для оптимизационных задач примеры.

2. Крайние точки полиэдра. Точку z выпуклого множества M называют крайней, если не существует точек x, y из M таких, что $x \neq y$ и $z = \frac{x+y}{2}$. Примеры крайних точек и их роль в задачах выпуклой оптимизации анализировались в 1.4. Для линейной оптимизации эта роль ещё более значительна.

Теорема 3. *Для того чтобы точка z была крайней точкой полиэдра Q, определяемого равенством (2), необходимо и достаточно, чтобы множество*

$$I(z) := \{i \in I, \ (a_i, z) = h_i\} \tag{7}$$

содержало подмножество I_0 мощности n и чтобы точки a_i, $i \in I_0$ были линейно независимы.

◄ Необходимость. Пусть множество $\{a_i, \ i \in I(z)\}$ содержит меньше чем n линейно независимых элементов. Тогда однородная система линейных относительно x уравнений

$$(a_i, x) = 0, \quad i \in I(z)$$

имеет ненулевое решение $\bar{x}$. Из определения (7) множества $I(z)$ вытекают соотношения

$$(a_i, z \pm \varepsilon\bar{x}) = h_i \ (i \in I(z)), \quad (a_i, z \pm \varepsilon\bar{x}) < h_i \ (i \notin I(z))$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$, так что

$$z + \varepsilon\bar{x} \in Q, \quad z - \varepsilon\bar{x} \in Q, \quad z = \frac{(z + \varepsilon\bar{x}) + (z - \varepsilon\bar{x})}{2},$$

т. е. z не является крайней точкой множества Q.

Достаточность. Пусть точка z из Q такова, что $|I_0| = n$ и для i из I_0 векторы a_i линейно независимы. Из определения I_0 вытекают соотношения

$$(a_i, z) = h_i, \quad i \in I_0. \tag{8}$$

Допустим, что

$$z = \frac{x+y}{2},\ x \in Q,\ y \in Q,\ x \neq y.$$

Так как $x, y \in Q$, то $(a_i, x) \leqslant h_i,\ (a_i, y) \leqslant h_i\ \forall i \in I$, поэтому

$$(a_i, x) = (a_i, y), \quad (i \in I_0). \tag{9}$$

Итак, две различные точки удовлетворяют системе уравнений (9), в которой уравнения линейно независимы и число их, совпадающее с мощностью множества I_0, равно n - размерности пространства. Это невозможно в силу известных теорем о разрешимости линейных уравнений. ►

Следствие. *Любой полиэдр имеет не более конечного числа вершин.*

3. Ограниченные полиэдры. Приведём условия ограниченности полиэдра Q, определяемого равенством (2).

Теорема 4. *Полиэдр Q ограничен тогда и только тогда, когда для любого a из $\mathbb{R}^n$ существуют такие $\lambda_i \geqslant 0$ $(i \in I)$, что выполняется равенство*

$$a = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i. \tag{10}$$

◄ Необходимость. Пусть множество Q ограничено. Установим существование неотрицательных чисел λ_i, для которых выполняется равенство (10). Если для некоторого a из $\mathbb{R}^n$ подобных чисел нет, то в силу теоремы Фаркаша существует элемент u из $\mathbb{R}^n$, для которого справедливы неравенства

$$(a_i, u) \leqslant 0\ (i \in I), \quad (a, u) > 0,$$

в частности, $u \neq 0$. Если $\bar{x} \in Q$, то при любом $\lambda \geqslant 0$ имеем

$$(\bar{x} + \lambda u, a_i) \leqslant (\bar{x}, a_i) \leqslant h_i\ (i \in I),$$

т. е. весь луч $\{\bar{x} + \lambda u,\ \lambda \geqslant 0\}$ принадлежит полиэдру Q. Это противоречит ограниченности множества Q.

Достаточность. Пусть множество Q неограничено. Рассмотрим последовательность x_j из Q, для которой $|x_j| \to \infty$ при $j \to \infty$. Последовательность $v_j = x_j/|x_j|$

ограничена ($|v_j| = 1$); не уменьшая общности, можно считать, что последовательность v_j сходится к вектору v длины 1. Так как $x_j \in Q$, то $(a_i, x_j) \leqslant h_i \ \forall i \in I$. Отсюда последовательно получаем

$$(a_i, v_j) \leqslant \frac{h_i}{|x_j|}, \quad (a_i, v) \leqslant 0 \ \forall i \in I\,.$$

В силу (10) вектор v есть коническая комбинация элементов a_i ($i \in I$), поэтому найдутся такие неотрицательные числа λ_i ($i \in I$), что

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \qquad \text{, а , следовательно,} \quad (v, v) = \sum_{i \in I} \lambda_i (a_i, v) \leqslant 0,$$

т. е. $|v| = 0$. Противоречие.▶

Критерий ограниченности полиэдра (2) может быть записан в иной (более геометричной) форме

$$\operatorname{con} \{a_i\}_{i \in I} = \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

При его выполнении Q есть выпуклая оболочка своих крайних точек, число которых конечно.

4. Неограниченные полиэдры. Полупространство, полоса доставляют примеры полиэдров, не имеющих крайних точек. Из теоремы 3 вытекает необходимое условие существования крайних точек у полиэдра Q, определяемого равенством (2): линейная оболочка множества $\{a_i\}_{i \in I}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$, в краткой записи

$$Lin \{a_i\}_{i \in I} = \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Это условие оказывается и достаточным. Если оно выполнено, то полиэдр Q называют регулярным. Приведём ряд результатов о геометрической структуре неограниченных полиэдров (доказательства, см., например, [1]).

Теорема I. *Полиэдр Q имеет крайние точки тогда и только тогда, когда он регулярен.*

Обозначим через M выпуклую оболочку крайних точек регулярного полиэдра Q. Введём в рассмотрение множество $K := \{x \in \mathbb{R}^n,\ (a_i, x) \leqslant 0 \ \forall i \in I\}$. Оно является выпуклым заострённым конусом, т. е. обладает свойствами: если $u \in K$, $v \in K$, $\lambda \geqslant 0$, то $u + v \in K$, $\lambda u \in K$, из соотношений $x \in K$, $-x \in K$ вытекает, что $x = 0$.

Теорема II. *Если полиэдр Q регулярен, то $Q = M + K$.*

Регулярный полиэдр Q допускает представление

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \, x = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s z_s + \sum_{t=1}^{l} \beta_t w_t \right\} \qquad (13),$$

где $z_s\,(s = 1, 2, \ldots, k)$ – крайние точки Q, $w_t\,(t = 1, 2, \ldots, l)$ – крайние рёбра конуса K,

$$\alpha_s \geqslant 0,\ \sum_{s=1}^{k} \alpha_s = 1,\ \beta_t \geqslant 0.$$

Равенство (13) позволяет предугадать многие результаты, связанные с линейной оптимизацией. Однако его доказательство довольно кропотливо и посему не приводится в данном пособии.

5. Канонический многогранник. Равенство $(a, x) = b$ эквивалентно двум неравенствам $(a, x) \leqslant b, (-a, x) \leqslant -b$. Поэтому множество

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n |\, (a_i, x) \leqslant b_i,\ (i \in I), \quad (a_i, x) = b_i\ (i \in I_0)$$

является полиэдром (см. раздел 1.4 п. 4). Для полиэдров, определяемых системой неравенств и равенств, верны естественные аналоги предшествующих результатов. Не проводя детального анализа всех возникающих здесь случаев, рассмотрим особо полиэдр X, называемый в дальнейшем каноническим многогранником и задаваемый системой уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_m \end{gathered} \tag{14}$$

и системой неравенств

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0. \tag{15}$$

Далее будут использоваться сокращённые формы записи системы соотношений (14), (15). Если ввести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и вектор-столбцы $x = (x_1\, x_2 \dots x_n)^T,\ b = (b_1\, b_2 \dots b_m)^T$, то система (14) запишется в виде

$$Ax = b\,. \tag{14$^\blacksquare$}$$

Строки матрицы $A = (a_{ij})$ размеров $m \times n$ обозначаются через $A^i\,(i = 1, \dots, m)$, столбцы – через $A_j\ (j = 1, \dots, n)$. Система (14) эквивалентна одному векторному равенству

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\, A_j \ = \ b \tag{14$^\blacklozenge$}$$

или системе скалярных равенств

$$A^i x = b_i \quad (i = 1, \dots, m). \tag{14*}$$

Обозначим через $\mathbb{R}^n_+$ совокупность вектор-столбцов с неотрицательными компонентами. Введём в $\mathbb{R}^n$ отношение частичной полуупорядоченности, полагая $x \leqslant$

y, если $y - x \in \mathbb{R}^n_+$. Аналогичным образом вводится отношение частичной полуупорядоченности в пространстве R_m вектор-строк. Система неравенств (15) эквивалентна одному векторному неравенству

$$x \geqslant 0. \tag{15$^\blacklozenge$}$$

С учётом принятых обозначений канонический многогранник X определяется соотношением

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geqslant 0\}. \tag{16}$$

Обсудим условия непустоты канонического многогранника. Вначале рассмотрим случай $m = 1$; в этом случае

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n,\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,\ x_1 \geqslant 0, \ldots x_n \geqslant 0\}.$$

Очевидно, $X \neq \varnothing$, если $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то $X = \varnothing$ в том и только в том случае , если $a_1b \leqslant 0, \ldots, a_nb \leqslant 0$. Аналог этого утверждения верен при любом m.

Теорема 5. *Канонический многогранник (16) есть непустое множество в том и только в том случае, когда для любой вектор-строки $p = (p_1 \ldots p_m)$, удовлетворяющей неравенствам*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{17}$$

справедливо неравенство

$$pb = \sum_{i=1}^{m} p_i b_i \leqslant 0. \tag{18}$$

◀ Непустота канонического многогранника (16) эквивалентна включению $b \in \mathrm{con}\{A_1 \ldots A_n\}$. Теперь доказываемый результат вытекает из теоремы Фаркаша (см. 1.4). ▶

Следствие. *Канонический многогранник X есть пустое множество в том и только в том случае, если существует вектор-строка $p = (p_1 \ldots p_m)$, удовлетворяющая системе неравенств (17), для которой $pb > 0$.*

Следствию можно придать такую форму: соотношение $X = \varnothing$ эквивалентно существованию некоторой линейной комбинации уравнений (14), не имеющей неотрицательных решений.

6. Крайние точки канонического многогранника. Крайние точки канонического многогранника называют вершинами (используются также термины: опорный план, угловая точка и др.). Для элемента x из $\mathbb{R}^n_+$ обозначим через $J(x)$ множество индексов j, для которых j- ая компонента вектора x положительна: $J(x) := \{j\ : x_j > 0\}$; $J(x)$ называют носителем элемента x.

Теорема 6. *Для того чтобы точка $z \in X$ была вершиной канонического многогранника (16), необходимо и достаточно, чтобы система вектор-столбцов A_j, $(j \in J(z))$ матрицы A была линейно независимой.*

◀ Необходимость. Пусть $z = (z_1 \dots z_n)^T$ – вершина многогранника X. Предположим, что векторы A_j $(j \in J(z))$ линейно зависимы. Тогда существуют числа λ_j $(j \in J(z))$, среди которых есть отличные от нуля и такие, что

$$\sum_{j \in J(z)} \lambda_j A_j = 0.$$

Положим $\lambda_j = 0$, если $j \notin J(z)$; пусть $\Lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^T$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} (z_j \pm \varepsilon \lambda_j) A_j = b.$$

При малых $\varepsilon > 0$ элементы $z + \varepsilon\Lambda, z - \varepsilon\Lambda$ входят в множество X. Очевидно, что z – середина отрезка $[z - \varepsilon\Lambda, z + \varepsilon\Lambda]$. Последнее противоречит тому, что z вершина X. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть система векторов $A_j\,(j \in J(z))$ линейно независима и $z = (z_1 \dots z_n)^T$ – середина отрезка $[x, y]$, где $x = (x_1 \dots x_n)^T \in X, y = (y_1 \dots y_n)^T \in X$. Если $j \notin J(z)$, то $0 = z_j = \frac{x_j + y_j}{2}$, поэтому $x_j = y_j = 0$. Следовательно,

$$\sum_{j \in J(z)} x_j A_j = \sum_{j \in J(z)} y_j A_j = b.$$

В силу линейной независимости системы векторов A_j $(j \in J(z))$ отсюда вытекает, что $x_j = y_j\,(j \in J(z))$. Итак, $x = y = z$.▶

Следствие. *У канонического многогранника существуют крайние точки.*

◀ Для доказательства достаточно воспользоваться леммой Каратеодори и теоремой 6. ▶

Каждой вершине z канонического многогранника (16) соответствует множетво $J(z)$, содержащее не более m элементов. Если z_1, z_2 – разные вершины, то $J(z_1) \neq J(z_2)$. Поэтому число вершин X не превосходит числа подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, содержащих не более m элементов; эта оценка числа вершин сильно завышена.

Задача 1. *Вывести теорему 6 из теоремы 3.*

Задача 2. *Привести пример неограниченного канонического многогранника.*

Задача 3. *Непустой канонический многогранник (16) ограничен, если и только если существует вектор-строка p, для которой $pA \gg 0$.*

Комментарий к задаче 3. Условие $x = (x_1 \dots x_n)^T \gg 0$ означает, что $x_j > 0$ $\forall j$. Критерий ограниченности X, приведённый в задаче 3, полуэффективен: он эффективен как достаточное, но не эффективен как необходимое условие ограниченности канонического многогранника.

2.2 Свойства задачи линейной оптимизации

1. Постановка задачи линейной оптимизации. Задача линейной оптимизации заключается в нахождении экстремальных значений линейной функции при наличии конечного числа ограничений типа неравенств и равенств, задаваемых аффинными функциями. Общая задача линейной оптимизации может быть записана в виде

$$l_0(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \ \to \quad \min\ (\max),$$

$$l_i(x) \geqslant b_i\ (i \in I_1), \quad l_i(x) = b_i\ (i \in I_2), \quad l_i(x) \leqslant b_i\ (i \in I_3).$$

Здесь $l_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ – линейные функционалы на $\mathbb{R}^n$, I_1, I_2, I_3 – непересекающиеся множества, некоторые из них могут быть пустыми. Среди ограничений часто встречаются условия неотрицательности переменных x_j.

Пример 1. Задача о диете. Пусть имеется n различных продуктов $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$. Обозначим через x_j суточное потребление j - го продукта. С каждой диетой связывается соответствующее ей количество питательных веществ (белки, жиры, углеводы, витамины и т. д.). Пусть величина a_{ij} характеризует содержание i - го питательного вещества в единице j - го продукта ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$). Тогда общее содержание i - го питательного вещества в принятой диете равно $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$. Обозначим через b_i минимальную потребность организма в i - ом веществе. Это означает, что диета должна удовлетворять ограничениям достаточности питания

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Если c_j – стоимость единицы j - го продукта, то стоимость всей диеты определяется функцией $l_0(x) = c_1x_1 + \ldots c_nx_n$. Оптимальной диетой следует признать такую систему продуктов $x_1, \ldots, x_n$ ($x_j \geqslant 0$), которая обращает в минимум функцию l_0 при соблюдении условия достаточности питания и неотрицательности переменных x_j. Задача о диете может быть записана следующим образом

$$l_0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \ \min,$$

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i\ (i = 1, \ldots, m); \quad x_j \geqslant 0\ (j = 1, \ldots, n).$$

Пример 2. Транспортная задача. Пусть имеется m поставщиков некоторой однородной продукции, располагающих a_i единицами продукции ($i = 1, \ldots, m$). Продукцию поставщиков используют n заказчиков, потребности которых характеризуются числами $b_1, \ldots, b_n$. Все числа $a_i, b_j > 0$. Известна стоимость c_{ij} перевоза единицы продукции от i - го поставщика к j - му заказчику. Требуется определить такое количество единиц продукции от каждого поставщика к каждому заказчику, чтобы транспортные расходы были минимальны и все потребности заказчика были удовлетворены. Обозначим через x_{ij} число единиц продукции от i - го поставщика к j - му заказчику. Транспортные расходы этой пары составят $c_{ij}x_{ij}$. Транспортная задача формализуется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_i, \quad x_{ij} \geqslant 0, \quad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

2. Разрешимость канонической задачи линейной оптимизации. Существует немало вариантов задачи линейной оптимизации, но наиболее употребительны два из них: каноническая задача линейной оптимизации и задача с однотипными условиями. Каноническая задача линейной оптимизации заключается в минимизации линейной функции на каноническом многограннике; её развёрнутая запись выглядит следующим образом

$$l_0(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \dots, m); \quad x_j \geqslant 0,\ (j = 1, \dots, n). \tag{2}$$

Если ввести вектор-столбцы $x = (x_1 \dots x_n)^T$, $b = (b_1 \dots b_m)^T$, вектор-строку $c = (c_1 \dots c_n)$ и матрицу $A = (a_{ij})$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$, то задача (1),(2) записывается в краткой форме

$$l_0(x) = cx \to \min, \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \tag{Z}$$

Допустимый элемент задачи (1),(2) называют планом. Совокупность планов составляет канонический многогранник $X := \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geqslant 0\}$. Если $X = \varnothing$, то задача (1),(2) бессодержательна; её значение будем считать равным $+\infty$. Если $X \neq \varnothing$ и функция l_0 ограничена снизу, то значением задачи (1),(2) называют число $\inf\{l_0(x),\ x \in X\}$; в случае неограниченности функции l_0 снизу значение задачи (1),(2) полагают равным $-\infty$. Итак, значением задачи (1),(2) может быть любой элемент из $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (+\infty) \cup (-\infty)$.

Теорема 1. *Если значение задачи (1),(2) конечно (из $\mathbb{R}$), то*

1) задача (1),(2) имеет решение;

2) среди решений задачи (1),(2) найдётся хотя бы одна вершина канонического многогранника; иначе говоря

$$\min_{x \in X} cx = \min_{x \in \operatorname{ext} X} cx. \tag{3}$$

◀ Пусть $A_1, \dots, A_n$ – столбцы матрицы A, $c_1, \dots, c_n$ – компоненты вектор-строки c. Введём векторы $P_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \dots, P_n = \begin{pmatrix} A_n \\ c_n \end{pmatrix}$ из $\mathbb{R}^{m+1}$. Обозначим через $\mathscr{K}$ коническую оболочку векторов $P_1, \dots, P_n$. Как было установлено ранее (см. раздел 1.3), $\mathscr{K}$ – замкнутый выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$. Если x – план задачи (1), (2) и $\alpha = cx$, то $\begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{K}$. С другой стороны, если $\begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{K}$, то существует план x задачи (1),(2), для которого $\alpha = cx$. Таким образом, множество $\mathscr{A} := \left\{ \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{K} \right\}$ непусто. Множество $\mathscr{A}$ ограничено снизу и число $\alpha_0 := \inf \mathscr{A}$ есть значение задачи (1),(2). Так как $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ и конус $\mathscr{K}$ замкнут, то $\begin{pmatrix} b \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{K}$, т. е. существует такой элемент $\hat{x}$ из $\mathbb{R}^n$, что $A\hat{x} = b, \hat{x} \geqslant 0$ и $c\hat{x} = \alpha_0 = \inf\{cx,\ x \in X\}$. Но это означает, что $\hat{x}$ – решение задачи (1),(2). Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим пересечение канонического многогранника X с гиперплоскостью $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n,\ cx = \alpha_0\}$. Множество $X_0 = X \cap \Gamma$ также является каноническим многогранником и, следовательно, обладает крайней точкой. Убедимся, что каждая вершина w многогранника X_0 является и вершиной исходного многогранника X, чем и будет доказана вторая часть теоремы. Если w не вершина X, то найдутся такие точки u, v из X, что $w = \frac{u+v}{2}$, $u \neq v$. Так как α_0 – минимальное значение функции cx на X, то $cu \geqslant \alpha_0$, $cv \geqslant \alpha_0$. Если $cu > \alpha_0$ или $cv > \alpha_0$, то $cw = \frac{cu+cv}{2} > \alpha_0$, что противоречит определению множества X_0. Следовательно, $cu = cv = \alpha_0$. Но это означает, что $u \in X_0,\ v \in X_0$. Представление $w = \frac{u+v}{2}$ пртиворечит тому, что w – вершина X_0. Из проведённых рассуждений вытекает, что w – вершина X. ▶

Равенство (3) сводит задачу (1),(2) к задаче описания множества $\operatorname{ext} X$ вершин многогранника X и последующей минимизации функции cx на $\operatorname{ext} X$. Хотя число вершин X конечно, намеченный путь трудно реализуем.

Во-первых, множество $\operatorname{ext} X$ заранее не известно, а задача его отыскания достаточно нетривиальна. Во-вторых, число $|\operatorname{ext} X|$ может быть достаточно большим, поэтому перебор всех вершин X затруднителен. Обычно используют вариант перебора вершин X, при котором значение целевой функции cx уменьшается. Ввиду конечности числа вершин любой метод перебора, уменьшающий значения целевой функции, конечен.

3. Разрешимость задачи с однотипными ограничениями. Заменим условия (2) однотипными ограничениями вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,\ (i = 1, \ldots, m); \quad x_j \geqslant 0,\ (j = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Задача минимизации функционала $l_0(x) = cx$ при условиях (4) записывается следующим образом

$$l_0(x) = cx \to \min, \quad Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0. \tag{P}$$

Теорема 2. *Пусть множество планов $\mathscr{X} := \{x \in \mathbb{R}^n, , Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\}$ задачи (P) непусто и функционал l_0 ограничен снизу на множестве $\mathscr{X}$. Тогда задача (P) имеет решение.*

◀ Введём дополнительные переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ и расмотрим каноническую задачу

$$\Lambda(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \cdots + 0 \cdot x_{n+m} \to \min, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i,\ (i = 1, \ldots, m), \quad x_k \geqslant 0\ (k = 1, \ldots, n+m). \tag{6}$$

Пусть V – множество планов задачи (5),(6). Сопоставим элементу x из $\mathscr{X}$ элемент $\Phi(x)$ из V, определяемый равенством $\Phi(x) = (x_1 \dots x_{n+m})^T$, где

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Соответствие Φ есть биекция $\mathscr{X}$ на V, поэтому $V \neq \varnothing$. Очевидно, что $l(x) = \Lambda(\Phi(x) \forall x \in \mathscr{X}$ и $l(\Phi^{-1}(z)) = \Lambda(z) \forall z \in V$. Поэтому функционал Λ ограничен снизу на V. Согласно теореме 1 задача (5),(6) имеет решение. Следовательно, задача (P) также имеет решение. ▶

Приём, основанный на сведении задач линейной оптимизации к канонической, позволяет установить теорему существования при двух естественных предположениях : непустота планов исследуемой задачи и ограниченность целевой функции снизу (или сверху, если идёт речь о задаче максимизации). В качестве ещё одного примера рассмотрим задачу

$$yb \to \max, \quad yA \leqslant c, \tag{Z^*}$$

называемую двойственной к задаче (Z).

Лемма1. *Если множество планов $Y := \{y \in \mathbb{R}_m,\ yA \leqslant c\}$ задачи (Z^*) непусто и функционал $y \to yb$ ограничен сверху на множестве Y, то задача (Z^*) имеет решение.*

◀ Сведём задачу (Z^*) к канонической задаче линейной оптимизации. Это достигается путём введения дополнительных переменных $u \in \mathbb{R}_m^+,\ v \in \mathbb{R}_m^+,\ w \in \mathbb{R}_n^+$ и замены $y = u - v$. Соответствующая каноническая задача имеет вид

$$(v - u)b \to \min,$$

$$(u - v)A + w = c, \quad u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ w \geqslant 0.$$

Разрешимость этой задачи, вытекающая из теоремы 1, влечёт за собой разрешимость задачи (Z^*). ▶

Лемма 2. *Если $x \in X$, $y \in Y$, то $yb \leqslant cx$.*

◀ Действительно, $yb = yAx \leqslant cx$; используются равенство $Ax = b$ и неравенства $yA \leqslant c,\ x \geqslant 0$. ▶

Лемма 3. *Если $X \neq \varnothing,\ Y \neq \varnothing$, то задачи $(Z), (Z^*)$ имеют решения $\bar{x}, \bar{y}$; при этом $\bar{y}b \leqslant c\bar{x}$.*

◀ Установим разрешимость задачи (Z). Действительно, множество X непусто, функционал $x \to cx$ ограничен снизу числом yb, где y – произвольный элемент Y. Теперь разрешимость задачи (Z) вытекает из теоремы 1.

Разрешимость задачи (Z^*) следует из лемм 1, 2. Если $\bar{x}$ – решение задачи (Z), $\bar{y}$ – решение задачи (Z^*), то в силу леммы 2 $\bar{y}b \leqslant c\bar{x}$. ▶

На самом деле в условиях леммы 3 можно гарантировать равенство: $\bar{y}b = c\bar{x}$; значения задач (Z), (Z^*) одинаковы. Это устанавливается в следующем пункте.

4. Теоремы двойственности.

Теорема 3. (Первая теорема двойственности). *Если одна из задач $(Z), (Z^*)$ имеет решение, то и другая также имеет решение, причём значения соответствующих задач равны.*

◀ 1-я часть. Пусть задача (Z^*), записанная в следующей форме

$$yb \to \max, \quad yA_j \leqslant c_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

имеет решение $\bar{y}$. Применим к этой задаче необходимые условия экстремума в задачах с линейными ограничениями (см. 1.4), согласно которым найдутся такие числа $\lambda_j\,(j = 1, \ldots, n)$, что выполнены условия

$$b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j \ , \tag{7}$$

$$\lambda_j(\bar{y}A_j - c_j) = 0, \quad \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n\,. \tag{8}$$

Равенство (7) это условие стационарности в рассматриваемой экстремальной задаче, соотношения (8) – условия дополняющей нежёсткости и неотрицательности множителей Лагранжа.

Положим $\bar{x} = (\lambda_1 \ldots \lambda_n)^T$. Из соотношений (7),(8) следует, что $A\bar{x} = b,\ x \geqslant 0,\ \bar{y}b = c\bar{x}$. В частности, $\bar{x} \in X$. В силу леммы 2 $c\bar{x} = \bar{y}b \leqslant cx\ \forall x \in X$, т. е. $\bar{x}$ – решение задачи (Z). Таким образом, разрешимость задачи (Z^*) влечёт за собой разрешимость задачи (Z) и равенство значений задач (Z) и (Z^*).

2-я часть. Пусть задача (Z) имеет решение $\bar{x}$. Положим

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\ (i = 1, \ldots, m), \quad \varphi_j(x) = -x_j\ (j = 1, \ldots, n).$$

Тогда $\bar{x}$ есть решение экстремальной задачи

$$l_0(x) = cx \to \min,$$

$$l_(x) - b_i = 0\ (i = 1, \ldots, m), \quad \varphi_j(x) \leqslant 0\ (j = 1, \ldots, n).$$

Согласно правилу множителей Лагранжа (см. 1.4) существуют числа $u_i \in \mathbb{R}, v_j \geqslant 0\ (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ такие, что

$$l_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i l_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \varphi_j = 0. \tag{9}$$

Введём в рассмотрение вектор-сторку $y = -(u_1 \ldots u_m)$. Равенство (9) влечёт оценку $c \geqslant yA$, в частности, $Y \neq \varnothing$. Поэтому задача (Z^*) также имеет решение. Требуемый результат вытекает теперь из первой части.▶

Теорема 4. (Вторая теорема двойственности). *Если*

$$X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing,$$

то обе задачи имеют решения и значения соответствующих задач равны.

◀ Разрешимость задач $(Z), (Z^*)$ следует из леммы 3, совпадение их значений – из теоремы 3. ▶

Теорема 5 (критерий оптимальности). *Для того чтобы планы $\bar{x}, \bar{y}$ задач (Z) и (Z^*) соответственно были их решениями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$(c - \bar{y}A)\bar{x} = 0. \tag{10}$$

◀ Необходимость. Если $\bar{x}, \bar{y}$ – решения задач $(Z), (Z^*)$, то

$$0 = c\bar{x} - \bar{y}b = c\bar{x} - \bar{y}A\bar{x} = (c - \bar{y}A)\bar{x}. \tag{11}$$

Достаточность. Если имеет место (10), то в силу (11) $c\bar{x} = \bar{y}b$. Согласно лемме 2 $yb \leqslant c\bar{x},\ \bar{y}b \leqslant cx\ \forall x \in X,\ y \in Y$. Следовательно, $yb \leqslant c\bar{x} = \bar{y}b \leqslant cx$ $(x \in X,\ y \in Y)$, т. е. $\bar{x}$, $\bar{y}$ являются решениями задач $(Z), (Z^*)$. ▶

Так как $c \geqslant \bar{y}A,\ \bar{x} \geqslant 0$, то равенство (10) эквивалентно системе равенств

$$(c_j - \bar{y}A_j)\bar{x}_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Приведём аналоги теорем 3 – 5 для задачи (P) (см. пункт 3 настоящего раздела). Двойственной к ней называют задачу

$$yb \to \max, \quad yA \leqslant c, \quad y \geqslant 0. \tag{P^*}$$

Теорема 6. *Если одна из задач $(P), (P^*)$ имеет решение, то и другая также имеет решение, причём значения соответствующих задач равны.*

Теорема 7. *Если множества планов задач $(P), (P^*)$ непусты, то обе задачи имеют решения и значения этих задач совпадают.*

Теорема 8. *Для того чтобы планы $\bar{x}, \bar{y}$ задач $(P), (P^*)$ были решениями соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (12).*

Проще всего теоремы 6 – 8 доказываются сведением задачи (P) к канонической путём введения дополнительных переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ (см. предшествующий пункт). Возможны и непосредственные доказательства этих теорем.

Существуют различные методы доказательств теорем двойственности – центрального результата теории линейной оптимизации. Упомянем здесь и чисто алгебраические, без использования теорем отделимости, и доказательства, основанные на принципиально новых идеях метода штрафных функций, и игровые подходы, базирующиеся на понятии седловой функции. Одновременное рассмотрение пары двойственных задач оказывается полезным и при численном анализе соответствущих проблем.

2.3 Симплекс-метод

1. Исходные предположения. Симплекс-метод, иногда именуемый методом последовательного улучшения плана, предназначается для решения канонической задачи линейной оптимизации

$$l(x) = cx \to \min, \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \tag{Z}$$

При определённых предположениях относительно матрицы A из $\mathbb{R}^{n\times m}$ и вектора b из $\mathbb{R}^m$ симплекс-метод позволяет либо найти решения задачи (Z), либо убедиться в его отсутствии.

Ниже $r(A)$ – ранг матрицы A. Вершину $z = (z_1 \dots z_n)^T$ канонического многогранника $X := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ называют невырожденной, если её носитель $J(z) := \{j | z_j > 0\}$ содержит m элементов. Сформулируем предположения, гарантирующие конечность симплекс-метода.

Предположение I. $r(A) = m < n$.

Предположение II. Каждая вершина канонического многогранника X невырождена.

Предположение III. Известна хотя бы одна вершина многогранника X.

Первое предположение означает, что каждое из уравнений $(Ax)_i = b_i$ не является следствием остальных. При $m = n = r(A)$ система $Ax = b$ имеет единственное решение, множество X сводится к одному элементу, поэтому задача минимизации на X становится тривиальной.

Предположение II более ограничительно. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – столбцы матрицы A, $K := \mathrm{con}\{A_1, \dots, A_n\}$ – коническая оболочка системы векторов $A_1, \dots, A_n$. Из предположения I следует, что внутренность $\mathring{K}$ конуса K непуста: $\mathring{K} \neq \varnothing$. Включение $b \in K$ эквивалентно непустоте X, однако предположение II может не выполняться. Обозначим через K_1 совокупность элементов b из K, представимых в виде конических комбинаций менее чем m векторов из системы $\{A_1, \dots, A_n\}$. Ясно, что K_1 содержится в объединении конечного числа пространств размерности $\leqslant m-1$. Поэтому K_1 составляет лишь небольшую часть конуса K. Предположение II эквивалентно включению $b \in K \setminus K_1$. Ввиду этого для большинства элементов b из K предположение II выполнено.

В ряде задач исходная вершина многогранника X находидится просто. В других случаях для её нахождения используются специальные процедуры. Обсуждение этого вопроса проводится в п. 5.

2. Анализ исходной вершины. Пусть $z = (z_1 \dots z_n)^n$ – вершина канонического многогранника X, $J(z) := \{j | z_j > 0\}$ – носитель точки z, $J_0(z) := \{j | z_j = 0\}$. Каждый вектор w из $\mathbb{R}^m$ допускает представление вида

$$w = \sum_{i \in J(z)} w_i A_i\,,$$

где w_i – координаты вектора w в базисе $A_i\,(i \in J(z))$. В частности, векторы $A_0 = b$, $A_1, \dots, A_n$ могут быть разложены по базису $A_i\,(i \in J(z))$. Таким образом

$$A_j = \sum_{i \in J(z)} z_{ij} A_i \quad (j = 0, 1, \dots, n); \tag{1}$$

здесь z_{ij} – i-ая координата вектора A_J в базисе $A_i\,(i \in J(z))$. Приравнивая одноимённые координаты в левой и правой частях равенства (1), приходим к системе уравнений

$$x_i + \sum_{t \in J_0(z)} z_{it} x_t = z_{i0} \quad (i \in J(z)), \tag{2}$$

эквивалентной первоначальной системе $Ax = b$, но более удобной для анализа.

Для перехода от системы $Ax = b$ к системе уравнений (2) можно использовать, например, метод исключения. Переменные x_i $(i \in J(z))$ будем называть базисными, а переменные x_t $(t \in J(z))$ – свободными. Все переменные x_j $(j = 1, \dots, n)$ должны быть неотрицательными; в этом смысле нельзя говорить о произвольности свободных переменных. Если $x_t = 0$ $(t \in J_0(z))$, то из (2) вытекают равенства $x_i = z_{i0}$ $(i \in J(z))$. Следовательно, $z_{i0} > 0$ $(i \in J(z))$.

Целевой функционал $l(x) = cx = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ можно представить как функцию свободных переменных x_t $(t \in J_0(z))$. Для этого достаточно каждое базисное переменное x_i $(i \in J_0(z))$ заменить его выражением через свободные переменные в соответствии с равенствами (2). В итоге придём к равенству

$$l(x) = z_{00} - \sum_{j=1}^{n} z_{0j}x_j, \tag{3}$$

в коотром $z_{00} = l(z),\ z_{0j} = 0$ при $j \in J(z)$, так что целевой функционал l зависит лишь от свободных переменных x_t $(t \in J_0(z))$. Числа z_{0j} $(j = 1, \dots, n)$ называют коэффициентами замещения, соответствующими вершине z.

Теорема 1. *Вершина z есть решение задачи (Z) в том и только в том случае, если $z_{0j} \leqslant 0$ $(j = 1, \dots, n)$.*

◀ Достаточность. Пусть

$$z_{0j} \leqslant 0 \ (j = 1, \dots, n).$$

Если $x = (x_1 \dots x_n)^T \in X$, то $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, \dots, n)$. Поэтому

$$l(x) = z_{00} - \sum_{j=1}^{n} z_{0j}x_j \geqslant z_{00} = l(z),$$

что и доказывает достаточность.

Необходимость. Пусть $z_{0s} > 0$ для некоторого s из $J_0(z)$. Покажем, что z не является решением задачи (Z). Положим $x_s = \lambda > 0$, остальные свободные переменные считаем равными 0. Базисные переменные x_i $(i \in J(z))$ определяются из системы (2):

$$x_i = z_{i0} - z_{is}\lambda \ (i \in J(z)). \tag{4}$$

При малых λ переменные x_i $(i \in J(z))$ положительны. Таким образом, малому положительному параметру λ сопоставляется точка $x(\lambda)$ из X с координатами $x_j(\lambda)$ $(j = 1, \dots, n)$, где

$$x_s(\lambda) = \lambda,\ x_t(\lambda) = 0\ (t \in J_0(z), t \neq s),\ x_i(\lambda) = z_{i0} - z_{is}\lambda\ (i \in J(z)).$$

В силу (3)

$$l(x(\lambda)) = l(z) - z_{0s}\lambda. \tag{5}$$

Так как $z_{0s} > 0$, то $l(x(\lambda)) < l(z)$ при $\lambda > 0$. Это означает, что z не является решением задачи (Z). ▶

Теорема 2. *Пусть $z_{0s} > 0$ для некоторого s из $J_0(z)$ и $z_{is} \leqslant 0$ $(i \in J(z))$. Тогда задача (Z) не имеет решения.*

◀ Действительно, в этом случае $x(\lambda) \in X$ при любом $\lambda > 0$. Согласно (5) $l(x(\lambda)) = l(z) - z_{0s}\lambda$, следовательно, $l(x(\lambda)) \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$, т. е. $\inf\{l(x), x \in X\} = -\infty$.▶

3. Описание одного шага симплекс-метода. Остался нерассмотренным случай, когда $z_{0s} > 0$ и $z_{is} > 0$ для некоторых s из $J_0(z)$ и i из $J(z)$. В этом случае элемент $x(\lambda)$ принадлежит X не при всех положительных λ, а лишь для λ из отрезка $[0, \theta]$, где

$$\theta = \min_i \frac{z_{i0}}{z_{is}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} > 0, \tag{6}$$

минимум в (6) берётся по тем индексам i, для которых $z_{is} > 0$. Индекс r из $J(z)$ равенством (6) определяется однозначно. Действительно, если бы это было не так, то элемент $v = x(\theta)$ имел меньше m положительных компонент, что противоречит предположению II. Справедливо равенство $J(v) \setminus r = J(z) \setminus s$. У нового плана v снова m положительных компонент. В силу (5) $l(v) = l(z) - z_{0s}\theta < l(z)$, т. е. переход от z уменьшает значение целевого функционала l.

Очевидно, что $z_{rs} > 0$. Отсюда следует, что v есть вершина X. Основу доказательства этого факта составляет

Лемма 1. *Пусть $g_1, \ldots, g_m$ – базис в $\mathbb{R}^m$, $h = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_m g_m$ и $\alpha_r \neq 0$. Тогда набор $g_1, \ldots, g_{r-1}, h, g_{r+1}, \ldots, g_m$ также базис в $\mathbb{R}^m$.*

◀ Достаточно установить линейную независимость системы векторов $g_1, \ldots, g_{r-1}$, h, $g_{r+1}, \ldots, g_m$. Пусть $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_{r-1} g_{r-1} + \lambda_r h + \lambda_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \lambda_m g_m = 0$. Тогда

$$\sum_{i \neq r} \lambda_i g_i + \lambda_r \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i = 0.$$

Векторы $g_1, \ldots, g_m$ образуют базис в $\mathbb{R}^m$, следовательно, $\lambda_i + \lambda_r \alpha_i = 0$ $(i \neq r)$ и $\alpha_r \lambda_r = 0$. Так как $\alpha_r \neq 0$, то $\lambda_r = 0$, поэтому $\lambda_i = 0$.▶

Из леммы 1 и предшествующих рассуждений вытекает

Теорема 3. *Пусть $z_{0s} > 0$ для некоторого s из $J_0(z)$ и $z_{is} > 0$ для некотрого индекса i из $J(z)$. Пусть число θ определено равенством (6)и $v = x(\theta)$. Тогда v – вершина X и $l(v) < l(z)$.*

Переход от старой вершины z к новой вершине v составляет один шаг симплекс-метода. Так как $l(v) < l(z)$, а число вершин канонического многогранника X конечно, то симплекс-метод конечен, т. е. реализуем за конечное число шагов.

4. Симплекс-таблица. В предшествующем пункте вершине z многогранника X сопоставлена совокупность чисел z_{ij}, где $i \in \{0\} \cup J(z)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Матрицу

$$M(z) = \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & \ldots & z_{0s} & \ldots & z_{0n} \\ z_{k0} & z_{k1} & \ldots & z_{ks} & \ldots & z_{kn} \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ z_{r0} & z_{r1} & \ldots & z_{rs} & \ldots & z_{rn} \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ z_{p0} & z_{p1} & \ldots & z_{ps} & \ldots & z_{pn} \end{pmatrix}$$

размеров $(m+1)\times(n+1)$ называют симплекс-таблицей, соответствующей вершине z. Нумерация строк нестандартна. Здесь $\{k,\dots,r,\dots,p\}=J(z)$; порядок следования строк несуществен. Важно, чтобы 1) были представлены все индексы, входящие в множество $J(z)$; 2) верхняя строка отведена числам z_{0j} $(j=0,1,\dots,n)$. Строки матрицы $M(z)$ обозначим символами $D_0, D_k,\dots,D_r,\dots,D_p$ соответственно. При i из $J(z)$ строка D_i состоит из i- ых компонент вектор-столбцов $A_0, A_1,\dots,A_n$ матрицы A в базисе $\{A_k,\dots,A_r,\dots,A_p\}$.

Анализ симплекс-таблицы позволяет либо установить оптимальность z, либо отсутствие решений канонической задачи, либо перейти от z к новой вершине v. Например, если $z_{0j}\leqslant 0$ $(j=1,\dots,n)$, то z – решение канонической задачи (теорема 1). Если $z_{0s}>0$ для некоторого $s=1,\dots,n$ и $z_{is}\leqslant 0\,\forall i\in J(z)$, то решения задачи (Z) не существует (теорема 2). Наиболее интересным представляется случай, когда $z_{0s}>0$ для некоторого s и $z_{is}>0$ хотя бы для одного индекса i из $J(z)$. В этом случае от вершины z можно перейти к вершине v, для которой $l(v)<l(z)$ (теорема 3).

Способ определения $J(v)$ заключается в следующем. Выбирается индекс r, исходя из требования

$$\min_{z_{is}>0}\frac{z_{i0}}{z_{is}}=\frac{z_{r0}}{z_{rs}}.$$

Как показано выше, индекс r данным условием определяется однозначно. Справедливо равенство $J(z)\setminus\{r\}=J(v)\setminus\{s\}$. Переменная x_r, базисная для вершины z, становится свободной для вершины v, и, наоборот, переменная x_s, свободная для вершины z, становится базисной для вершины v. Вместо базиса $\mathcal{B}=\{A_i,\, i\in J(z)\}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ рассматривается базис $\mathcal{B}'=\{A_i,\, i\in J(v)\}$, отличающийся от старого базиса $\mathcal{B}$ заменой вектора A_r вектором A_s.

Координаты w_i' вектора w из $\mathbb{R}^m$ в базисе $\mathcal{B}'$ выражаются через координаты w_i того же вектора в базисе $\mathcal{B}$ равенствами

$$w_r'=\frac{w_r}{z_{rs}},\qquad w_i'=w_i-w_r'z_{rs}\quad (i\neq r).\tag{7}$$

Действительно, справедливы равенства

$$w=\sum_{i\in I(z)}w_iA_i,\qquad A_s=\sum_{i\in I(z)}z_{is}A_i,$$

в частности,

$$A_r=\frac{A_s}{z_{rs}}-\sum_{i\in I(z)\setminus\{r\}}\frac{z_{is}}{z_{rs}}A_i.$$

Объединяя указанные соотношения, получаем

$$w=\sum_{i\in I(z)\setminus\{r\}}w_iA_i+w_rA_r=\sum_{i\in I(v)\setminus\{s\}}w_iA_i+w_r\left(\frac{A_s}{z_{rs}}-\sum_{i\in I(v)\setminus\{s\}}\frac{z_{is}}{z_{rs}}A_i\right)=$$

$$=\sum_{i\in I(v)\setminus\{s\}}\left(w_i-w_r\frac{z_{is}}{z_{rs}}\right)A_i+\frac{w_r}{z_{rs}}A_s=\sum_{i\in I(v)}w_i'A_i.$$

Это и приводит к формулам (7).

Новой вершине v соответствует симплекс-таблица $M(v) = (v_{ij})$ $(i \in \{0\} \cup J(v); j = 0, 1, \ldots, n)$. Её строки обозначим через G_i $(i \in \{0\} \cup J(v))$. Строки новой симплекс-таблицы достаточно просто выражаются через строки старой симплекс-таблицы. Именно, строка D_r заменяется строкой

$$G_s = \frac{D_r}{z_{rs}}, \tag{8}$$

остальные строки G_i определяются по формулам

$$G_i = D_i - z_{is} G_s \qquad (i \in \{0\} \cup J(v),\ i \neq s). \tag{9}$$

Формулы (8),(9) вытекают из равенств (7); читателю рекомендуется убедиться в этом самостоятельно.

Переход от старой симплекс-таблицы к новой естественным образом распадается на ряд этапов.

I) Определение индексов s, r и ведущего элемента $z_{rs} > 0$.

II) Нахождение строки G_s путём деления D_r на z_{rs}.

III) Нахождение остальных строк G_i по формулам (9).

В результате проведённых преобразований s-ый столбец симплекс-таблицы приобретает специфическую форму: на пересечений s-ой строки и s-го столбца находится 1, остальные элементы столбца равны 0. Цель этапов II,III заключается в том, чтобы с помощью элементарных строчных преобразований придать s-му столбцу симплекс-таблицы данную специфическую форму.

5. Нахождение начальной вершины канонического многогранника. Для отыскания начальной вершины канонического многогранника $X := \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ используется метод искусственного базиса. Будем считать, что все компоненты b_i вектора b положительны. Это не уменьшает общности, так как с помощью элементарных строчных преобразований системы $Ax = b$ (с $b \neq 0$) всегда можно прийти к случаю $b \gg 0$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ вспомогательную каноническую задачу

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \to \min, \tag{10}$$

$$Ax + u = b, \quad x \geqslant 0, \quad u = (u_1 \ldots u_m)^T \geqslant 0. \tag{11}$$

Положим

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix},\ Ax + u = b,\ x \geqslant 0,\ u \geqslant 0 \right\};$$

иначе говоря, W – канонический многогранник в $\mathbb{R}^{n+m}$, соответствующий задаче (10),(11). Точка $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ является вершиной многогранника W (доказать самостоятельно).

Задача (10), (11) очевидным образом имеет решение, поскольку целевой функционал ограничен снизу. Применяя симплекс-метод к этой задаче, можно найти её решение $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ $(\bar{x} = (\bar{x}_j),\ \bar{u} = (\bar{u}_i))$. Обозначим через μ значение этой задачи, т. е. $\mu = \bar{u}_1 + \cdots + \bar{u}_m$.

Теорема 4. *Если $\mu = 0$, то $\bar{x}$ – вершина X. Если $\mu > 0$, то $X = \varnothing$.*

◀ Пусть $\mu = 0$. Тогда $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ есть вершина многогранника W, поскольку задача (10),(11) решается симплекс-методом, осуществляющим перебор крайних точек многогранника W. Элемент $\bar{x}$ есть крайняя точка канонического многогранника X. Действительно, если $\bar{x}$ – промежуточная точка X, то $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ – промежуточная точка W. Противоречие.

Пусть $\mu > 0$. Если $X \neq \varnothing$ и $x \in X$, то точка $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ есть решение задачи (10),(11). Это противоречит предположению $\mu > 0$. ▶

Описанный метод является составной частью большинства стандартных программ ЭВМ. Для задачи с ограничениями-неравенствами

$$l(x) = cx \to \min, \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0 \quad (b \gg 0)$$

полезно её сведение к канонической задаче вида

$$l(x) = cx \to \min, \quad Ax + u = b, \quad x \geqslant 0, \quad u \geqslant 0. \tag{12}$$

В задаче (12) в качестве исходной вершины можно взять точку $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

6. Замечания и примеры. Отказ от предположения II может привести к зацикливанию симплекс-метода. Если вершина z канонического многогранника X вырождена, то число её положительных компонент меньше m. При переходе от вершины z к следующей вершине v значение целевого функционала может не уменьшаться: $l(v) = l(x)$. Вырожденность вершины z может повлечь неоднозначность выбора параметра r.

Перечисленные обстоятельства могут привести к явлению зацикливания, когда через некоторое число шагов симплекс-метод приводит к прежней вершине. Для исключения зацикливания достаточно фиксировать любой регулярный способ выбора параметров r, s. Подробное обсуждение этого вопроса можно найти, например, в книгах [1] и [4].

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда $m = n - 1$. Тогда симплекс-метод приводит к цели самое большее за один шаг. Пусть, например, z – вершина X, $J(z) = \{1, \ldots, n-1\}$. Отсюда получаем

$$x_i + z_{in} x_n = z_{i0}, \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

$$l(x) = l(z) - z_{0n} x_n.$$

Каноническая задача в рассматриваемом случае сводится к задаче

$$z_{0n} x_n \to \max, \quad z_{in} x_n \leqslant z_{i0} \ (i = 1, \ldots, n-1), \quad x_n \geqslant 0,$$

т. е. максимизации линейной функции на некотором замкнутом промежутке. Возвращаясь к произвольной канонической задаче, отметим, что на каждом шаге симплекс-метода возникает задача только что рассмотренного вида.

Пусть $m = n-2,\ J(z) = \{1, \dots, n-2\}$. Имеем тогда

$$x_i + z_{in-1}x_{n-1} + z_{in}x_n = z_{i0} \quad (i = 1, \dots, n-2)$$

$$l(x) = l(z) - z_{0n-1}x_{n-1} - z_{0n}x_n.$$

Исходная задача сводится к следующей

$$z_{0n-1}x_{n-1} + z_{0n}x_n \to \max, \tag{13}$$

$$z_{in-1}x_{n-1} + z_{in}x_n \leqslant z_{i0} \quad (i = 1, \dots, n-2;\ x_{n-1} \geqslant 0, x_n \geqslant 0). \tag{14}$$

Задача (13),(14) может быть решена геометрически. Множество допустимых точек (x_{n-1}, x_n) в задаче (13),(14) есть пересечение конечного числа полуплоскостей. Таким образом, (13),(14) – это задача максимизации линейной функции на многогранном множестве, достаточно просто решаемая геометрическими методами.

При малых m $(m = 1, 2)$ легко решается двойственная к канонической задаче. Пусть, например, $m = 2$. Двойственная задача

$$b_1y_1 + b_2y_2 \to \max,$$

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 \leqslant c_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

может быть решена геометрическими методами. Пусть $\bar{y} = (\bar{y}_1\ \bar{y}_2)$ – решение двойственной задачи, $\omega := \{j|\ c_j > a_{1j}\bar{y}_1 + a_{2j}\bar{y}_2\}$. Если $\hat{x} = (\hat{x}_j)$ – решение исходной канонической задачи, то из условий дополнительной нежёсткости $\hat{x}_j(c_j - a_{1j}\bar{y}_1 - a_{2j}\bar{y}_2) = 0 \qquad (j = 1, \dots, n)$ вытекают равенства $\hat{x}_j = 0 \quad (j \in \omega)$. Носитель вершины $\hat{x}$ содержится в множестве $\{1, \dots, n\} \setminus \omega$, отсюда нетрудно найти $\hat{x}$. Ещё более проста ситуация в случае $m = 1$.

Глава 3

Численные методы минимизации функций нескольких переменных

К настоящему моменту разработано и исследовано большое количество методов минимизации функций конечного числа переменных. О методах минимизации функций одной переменной можно прочитать, например, в [4], [19]. Эта область экстремальных задач продолжает бурно развиваться. Мы остановимся лишь на некоторых наиболее известных и часто используемых на практике методах минимизации. Будет дано описание каждого из рассматриваемых методов, исследованы вопросы сходимости, обсуждены некоторые вычислительные аспекты, даны рекомендации по программированию.

3.1 Постановка задачи численной минимизации

Пусть U— некоторое множество в $\mathbb{R}^n$, f— функция, определенная на U. В этой главе под минимизацией функции на множестве U мы будем понимать решение следующей задачи: найти хотя бы одну точку минимума x_* и минимум $f_* = f(x_*)$ этой функции на U.

При этом будем использовать и краткую форму записи:

$$f(x) \to \min, \qquad x \in U. \tag{1}$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются два определения.

Определение 1. *Последовательность z_k ($z_k \in U$ $\forall k \in \mathbb{N}$) называется минимизирующей для функции $f(x)$ на множестве U, если*

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \min_{x\in U} f(x).$$

Определение 2. *Говорят, что последовательность z_k, точек из $\mathbb{R}^n$, сходится к непустому множеству M ($M \subset \mathbb{R}^n$), если $\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(z_k, M) = 0$.*

Для приближенного решения задачи (1) на практике обычно строят минимизирующую последовательность z_k, сходящуюся к множеству точек минимума функции f на U, и затем в качестве приближения для f_* и x_* берут, соответственно, величину $f(z_k)$ и точку z_k при достаточно большом k. Для построения такой последовательности используют тот или иной численный метод.

Следует сказать, что в теории численных методов оптимизации есть понятия принципиального алгоритма и реализуемого. Различие между ними состоит в том, что на каждой итерации принципиального алгоритма может осуществляться произвольное число арифметических операций, а также обращений к вычислению функции, в то время как на каждой итерации реализуемого алгоритма — только конечное число.

В процессе конструирования численного метода обычно начинают с изобретения принципиального алгоритма. Затем его модифицируют, стремясь привести к виду, пригодному для реализации на вычислительных машинах.

3.2 Безусловная оптимизация

В том случае, когда в задаче (1) множество U совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, говорят о безусловной минимизации функции $f(x)$. Для решения такой задачи наиболее часто применяют методы, в основе которых лежит вычисление частных производных функции $f(x)$ первого порядка. Такие методы обычно называют градиентными.

1. Градиентные методы. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n$ и $f'(x_0)$ — градиент функции в точке x_0. По определению дифференцируемости приращение функции в точке x_0 допускает представление

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (f'(x_0), h) + o(h),$$

где

$$(f'(x_0), h) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_0)h_i, \qquad \text{и} \qquad \lim_{|h|\to 0} \frac{o(h)}{|h|} = 0.$$

Если $|f'(x_0)| \neq 0$ и $h = -\alpha f'(x_0)$, то

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = -\alpha|f'(x_0)|^2 + o(\alpha) < -\frac{\alpha}{2}|f'(x_0)|^2 < 0 \tag{2}$$

для любого $\alpha : 0 < \alpha < \alpha_0$, где α_0 — некоторое положительное число. Из (2) вытекает, что от точки x_0 в направлении антиградиента есть «спуск».

Более того, в силу неравенства Коши-Буняковского

$$|(f'(x_0), h)| \leq |f'(x_0)| \cdot |h|,$$

которое можно переписать в виде

$$-|f'(x_0)| \cdot |h| \leq (f'(x_0), h) \leq |f'(x_0)| \cdot |h|,$$

направление антиградиента — это направление наискорейшего убывания функции. Действительно, если $f'(x_0) \neq 0$, то левое неравенство обращается в равенство только при $h = -cf'(x_0)$, где $c = const \geq 0$.

Все градиентные методы опираются на указанное свойство антиградиента и имеют в основе описанный ниже принципиальный алгоритм (в нём требуется минимизировать функцию вдоль луча на каждой итерации, что, разумеется, не выполнимо ни в одном практическом алгоритме).

Алгоритм метода (принципиальная схема)

1) Выбираем в качестве начального приближения такую точку $z_0 \in \mathbb{R}^n$, что множество

$$C(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) \le f(z_0)\}$$

ограничено.

2) Полагаем $k = 0$.

3) Вычисляем градиент функции — вектор $f'(z_k)$.

4) Полагаем $h_k = -f'(z_k)$. Если $h_k = 0$, то останавливаемся; иначе переходим к пункту 5.

5) Вычисляем α_k — наименьшее неотрицательное число, удовлетворяющее условию

$$f(z_k + \alpha_k h_k) = \inf_{\alpha \ge 0} f(z_k + \alpha h_k).$$

6) Полагаем $z_{k+1} := z_k + \alpha_k h_k$, $k := k + 1$ и переходим к пункту 3.

Пример 1. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 4x_2$. Применим вышеизложенный алгоритм к решению оптимизационной задачи

$$f(x_1, x_2) \to \min, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Очевидно, что условие пункта 1 будет выполнено для любой точки z_0. Возьмем, к примеру,$(-1, 1)$ в качестве z_0. Градиент функции в этой точке $f'(-1, 1) = (-4, 6)$. Следовательно, в пункте 5 мы рассматриваем функцию

$$f(-1 + 4\alpha, 1 - 6\alpha) = 52\alpha^2 - 52\alpha + 8.$$

Решая для нее задачу минимизации

$$52\alpha^2 - 52\alpha + 8 \to \min, \qquad \alpha \ge 0,$$

находим $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ и следующую точку $z_1 = (1, -2)$ минимизирующей последовательности . В этой точке градиент $f'(1, -2) = (0, 0)$, поэтому алгоритм завершает свою работу. Задача (3) решена, поскольку функция выпукла; $x_* = (1, -2)$, $f_* = -5$. Нам потребовался один шаг итерационного процесса.

Комментарии. Для функции из рассмотренного примера линии уровня

$$f(x_1, x_2) = c,$$

где $c > -5$, являются окружностями. Антиградиент в точке z — это вектор, ортогональный линии уровня функции, проходящей через эту точку. Чем ближе линии уровня целевой функции к окружностям, тем быстрее сходится рассмотренный метод. Если линии уровня сильно вытянуты и функция имеет так называемый «овражный» характер, то алгоритм сходится медленно. Примером такой функции может служить функция Розенброка

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Ее линии уровня имеют форму банана.

Для принципиального алгоритма градиентного метода в предположениях непрерывной дифференцируемости функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и существования такой точки z_0, что множество

$$C(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) \leq f(z_0)\}$$

ограничено, докажем теорему сходимости.

Теорема 1. *Пусть z_k — последовательность, построенная алгоритмом градиентного метода. Тогда она либо конечна и завершается точкой z_{k_0}, для которой $f'(z_{k_0}) = 0$, либо бесконечна, и каждая ее предельная точка $\hat{z}$ удовлетворяет условию $f'(\hat{z}) = 0$.*

◀ Требует рассмотрения только случай, когда z_k — бесконечная последовательность. По построению

$$f(z_{k+1}) < f(z_k) \leq f(z_0)$$

для $\forall k \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $z_k \in C(z_0)$ для $\forall k \in \mathbb{N}$. Из непрерывности функции f и ограниченности множества $C(z_0)$ вытекает компактность $C(z_0)$ в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, множество предельных точек последовательности z_k непусто. Пусть $\hat{z}$ — предельная точка. Докажем, что $f'(\hat{z}) = 0$. Предположим противное, что $f'(\hat{z}) \neq 0$. Тогда $|f'(\hat{z})| \neq 0$. В силу (2)

$$f(\hat{z} - \alpha f'(\hat{z})) - f(\hat{z}) = -\alpha |f'(\hat{z})|^2 + o(\alpha) < -\frac{\alpha}{2}|f'(\hat{z})|^2 < 0$$

для $\forall \alpha \in (0, \varepsilon)$, где ε — достаточно малое положительное число. Пусть $\alpha(\hat{z})$ — наименьшее положительное число, удовлетворяющее условию

$$f(\hat{z} - \alpha(\hat{z}) f'(\hat{z})) - f(\hat{z}) = \inf_{\alpha > 0} (f(\hat{z} - \alpha f'(\hat{z})) - f(\hat{z})).$$

Рассмотрим функцию $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определённую формулой

$$\theta(z) = f(z - \alpha(\hat{z}) f'(z)) - f(z).$$

Заметим, что

$$\theta(\hat{z}) = f(\hat{z} - \alpha(\hat{z}) f'(\hat{z})) - f(\hat{z}) < 0.$$

Функция $\theta(z)$ непрерывна по z. Поэтому, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|\theta(z) - \theta(\hat{z})| < -\frac{\theta(\hat{z})}{2} \tag{4}$$

для любого $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего неравенству $|z - \hat{z}| < \delta$. Тогда $\theta(z) < \frac{\theta(\hat{z})}{2}$ для всех $z \in \{z \in \mathbb{R}^n : |z - \hat{z}| < \delta\}$. Если $\alpha(z)$ — наименьшее неотрицательное число, такое, что

$$f(z - \alpha(z) f'(z)) - f(z) = \inf_{\alpha \geq 0} (f(z - \alpha f'(z)) - f(z)),$$

то

$$f(z - \alpha(z)f'(z)) - f(z) \leq \theta(z) < \frac{\theta(\hat{z})}{2} \qquad (5)$$

для $z \in \{z \in \mathbb{R}^n : |z - \hat{z}| < \delta\}$.

Пусть z_{k_m} — подпоследовательность последовательности z_k, сходящаяся к точке $\hat{z}$. Очевидно, что $|z_{k_m} - \hat{z}| < \delta$ для $\forall m > m_0$, где m_0 — некоторое натуральное число. Рассмотрим последовательность $f(z_{k_m})$. Если $i > j > m_0$, то

$$f(z_{k_i}) - f(z_{k_j}) = (f(z_{k_i}) - f(z_{k_{i-1}})) + \cdots + (f(z_{k_j+1}) - f(z_{k_j})) < \frac{\theta(\hat{z})}{2}$$

в силу (5). Поэтому можно утверждать, что для любых $i, j > m_0$ $(i \neq j)$

$$|f(z_{k_i}) - f(z_{k_j})| > -\frac{\theta(\hat{z})}{2},$$

откуда по критерию Коши вытекает, что последовательность $f(z_{k_m})$ расходится. Но функция f непрерывна, а $z_{k_m} \to \hat{z}$ при $m \to \infty$. Значит, $f(z_{k_m}) \to f(\hat{z})$ при $m \to \infty$. Получили противоречие. Следовательно, $f'(\hat{z}) = 0$. ▶

Замечание 1. *Если в дополнение к сделанным ранее предположениям потребовать, чтобы функция f была выпуклой на $\mathbb{R}^n$, то последовательность z_k будет минимизируещей для f на $\mathbb{R}^n$ и будет сходиться к множеству точек минимума функции f. Это следует из того, что для выпуклой дифференцируемой функции стационарная точка является точкой минимума.*

Перейдем теперь к описанию реализуемых алгоритмов градиентного метода (то есть таких алгоритмов, которые могут быть запрограммированы для выполнения рассчетов на компьютере). Реализуемых модификаций градиентного метода существует много. Учитывая накопленный вычислительный опыт, мы предлагаем следующий алгоритм численного решения задачи

$$f(x) \to \min, x \in \mathbb{R}^n.$$

Рекомендуемый алгоритм градиентного метода.

1. Выбираем точку $z_0 \in \mathbb{R}^n$, такую, что множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(z_0)\} \qquad (6)$$

ограничено.

2. Полагаем $k = 0$.

3. Вычисляем градиент функции — вектор $f'(z_k)$.

4. Полагаем $h_k = -f'(z_k)$. Если $|h_k| \leq \varepsilon$, переходим к пункту 8; иначе выполняем пункт 5.

5. Полагаем $\alpha = 1$.

6. Вычисляем

$$\Delta = f(z_k + \alpha h_k) - f(z_k) + \frac{\alpha}{2}|h_k|^2.$$

7. Если $\Delta \le 0$, то $z_{k+1} := z_k + \alpha h_k$, $k := k+1$ и переходим к пункту 3; иначе $\alpha := \frac{\alpha}{2}$ и переходим к пункту 6.

8. $x_* := z_k$, $f_* := f(z_k)$.

Замечание 2. *Пункт 1 алгоритма не программируется. Выбор начального приближения z_0 осуществляет человек. Если точку, удовлетворяющую условию (6) найти не удаётся, алгоритм применять нельзя.*

Замечание 3. *В пункте 3 алгоритма мы вычисляем градиент функции — вектор из частных производных. Для приближенного решения этой промежуточной задачи можно использовать конечно-разностную аппроксимацию частных производных функции f. Если*

$$f'_{x_i}(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + he_i) - f(z)}{h},$$

где $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ — единичный координатный (базисный) вектор, у которого i-я координата равна 1, а остальные равны нулю, $i = 1, \ldots, n$; то можно положить

$$f'_{x_i}(z) \approx \frac{f(z + he_i) - f(z - he_i)}{2h},$$

где $h = 0.00005$.

Комментарии. В описанном алгоритме критерием окончания итерационного процесса служит неравенство $|f'(z_k)| \le \varepsilon$, где ε — заданная точность вычислений. В численных методах минимизации функций нескольких переменных, в том числе и градиентных, часто используют и другие критерии, а именно,

$$|z_k - z_{k+1}| \le \delta$$

или

$$|f(z_k) - f(z_{k+1})| \le \gamma,$$

где δ и γ – заданные числа. Иногда заранее задают число итераций; возможны также различные сочетания этих и других условий. Понятно, что ко всем этим критериям следует относиться критически, поскольку они могут выполняться и вдали от искомой точки минимума. К сожалению, надежных критериев окончания счета, применимых к широкому классу задач и гарантирующих получение решения задачи (1) с требуемой точностью, пока нет. Сделанное замечание относится и к другим излагаемым далее методам.

Опишем еще один реализуемый алгоритм градиентного метода. В нем на каждом шаге итерационного процесса решается одномерная задача минимизации. В литературе его называют обычно методом наискорейшего градиентного спуска.

Пусть $\varepsilon_0, h > 0$ — параметры метода, ε — заданная точность.

Реализуемый алгоритм метода наискорейшего спуска.

1. Выбираем точку $z_0 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую условию (6).
2. Полагаем $k = 0$, $\delta = \varepsilon_0$.

3. Вычисляем градиент функции $f'(z_k)$.

4. Полагаем $h_k = -f'(z_k)$. Если $|h_k| \le \varepsilon$, переходим к пункту 9; иначе выполняем пункт 5.

5. Определяем функцию $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ равенством

$$\theta(\alpha) = f(z_k + \alpha h_k) - f(z_k).$$

6. Применяем алгоритм минимизации функции вдоль луча, описанный ниже, для вычисления α_k, используя текущее значение δ.

7. Если $\theta(\alpha_k) < -\delta$, то $z_{k+1} := z_k + \alpha_k h_k$, $k := k+1$ и переходим к пункту 3; иначе $\delta := \frac{\delta}{2}$.

8. Применяем алгоритм минимизации функции вдоль луча с пункта 4 и переходим к пункту 7.

9. $x_* := z_k$, $f_* := f(z_k)$.

Алгоритм минимизации функции вдоль луча.

1. Полагаем $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = h$.

2. Если $\theta(u_1) \le \theta(u_2)$, то $a := u_0$, $b := u_2$ и переходим к пункту 4; иначе выполняем пункт 3.

3. Полагаем $u_0 := u_1$, $u_1 := u_2$, $u_2 := u_1 + h$ и переходим к пункту 2.

4. На отрезке $[a, b]$ находим точку минимума функции θ по методу золотого сечения (см. например [19]), уменьшая отрезок $[a, b]$ до тех пор, пока не будет выполнено условие $|a - b| < \delta$.

2. Метод покоординатного спуска. В предыдущем пункте мы рассмотрели методы, требующие для своей реализации вычисления производных первого порядка минимизируемой функции. Однако в практических задачах нередко встречаются случаи, когда минимизируемая функция либо не обладает нужной гладкостью, либо является гладкой, но вычисление ее производных с нужной точностью затруднительно. В таких случаях нужны методы минимизации, которые требуют лишь вычисления значений функции. Одним из таких методов является метод покоординатного спуска. Опишем его для решения задачи (1), где $U = \mathbb{R}^n$.

Пусть $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ — единичный координатный (базисный) вектор, $i = 1, \dots, n$; α_0 — некоторое положительное число, z_0 — начальное приближение. Положим $p_k = e_i$, где

$$i = k \mod n \quad + 1. \tag{7}$$

Условие (7) обеспечивает циклический перебор координатных векторов e_1, e_2, $\dots$, e_n, то есть

$$p_0 = e_1, \quad p_1 = e_2, \quad \dots, \quad p_{n-1} = e_n, \quad p_n = e_1, \quad \dots$$

Алгоритм метода покоординатного спуска (принципиальная схема).

1. Полагаем $k = 0$.

2. $z := z_k + \alpha_k p_k$.

3. Сравниваем значения функции в точках z и z_k. Если $f(z) < f(z_k)$, то $z_{k+1} := z$ и переходим к пункту 5; иначе $z := z_k - \alpha_k p_k$ и выполняем пункт 4.

4. Сравниваем значения функции в точках z и z_k. Если $f(z) < f(z_k)$, то $z_{k+1} := z$; иначе $z_{k+1} := z_k$.

5. Полагаем $\alpha_{k+1} := \alpha_k$, $k := k + 1$.

6. Если k кратно n, то выполняем пункт 7; иначе переходим к пункту 2.

7. Проверяем, был ли «спуск» по какой-либо из n координат. Если «спуска» не было и точки z_k и z_{k-n} совпадают, то $\alpha_k := \frac{\alpha_k}{2}$.

8. Переходим к пункту 2.

Комментарии. Описанный алгоритм строит бесконечную последовательность z_k. Есть начальное приближение z_0 и начальный шаг α_0. Как протекает итерационный процесс? К первой координате вектора z_0 мы прибавляем α_0 ($z := z_0 + \alpha_0 e_1$). Если в точке z функция принимает меньшее значение, чем в z_0, в качестве следующей точки последовательности берем z. Если нет, то из первой координаты вектора z_0 вычитаем α_0 и делаем аналогичную проверку. Если «спуска» не было «ни в ту, ни в другую сторону» следующая точка последовательности совпадет с предыдущей. После этого переходим ко второй координате и повторяем для нее те же действия, потом к третьей и так далее..., пока k не станет кратно n, т. е. пока мы последовательно не переберем все n координат. Если по окончании цикла из n итераций, хотя бы одна оказалась «удачной» и удалось «спуститься» по какой-либо координате, α для следующей серии итераций оставляем прежним. Если же ни по одной из координат «спуска» не было и по прошествии цикла мы «не сдвинулись с места», шаг α уменьшаем в два раза. После этого снова проводим цикл из n итераций.

Для обоснования сходимости метода покоординатного спуска приведем следующую теорему. Её доказательство можно найти в [4].

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема и выпукла на $\mathbb{R}^n$; начальное приближение z_0 таково, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le f(z_0)\}$ ограничено. Тогда последовательность z_k, полученная описанным методом минимизирует функцию f на $\mathbb{R}^n$ и сходится к множеству точек минимума функции f на $\mathbb{R}^n$.*

Задача. *Исследовать сходимость метода покоординатного спуска и градиентного для решения задачи минимизации функции $|Ax - b|^2$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, а A-матрица порядка $m \times n$.*

Ранее мы упоминали о различии между принципиальным алгоритмом и реализуемым. Приведем теперь описание реализуемого варианта метода покоординатного спуска.

Пусть α_0 — параметр метода, ε_0 — заданная точность. Для удобства изложения начальное приближение обозначим через z_1.

Реализуемый алгоритм метода покоординатного спуска.

1. Выбираем точку z_1, такую, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le f(z_1)\}$ ограничено.

2. Полагаем $k = 1$, $\alpha = \alpha_0$.

3. $z := z_k + \alpha e_k$.

4. Сравниваем два значения $f(z)$ и $f(z_k)$. Если $f(z) < f(z_k)$, то $z_{k+1} := z$ и переходим к пункту 6; иначе $z := z_k - \alpha e_k$.

5. Сравниваем $f(z)$ и $f(z_k)$.Если $f(z) < f(z_k)$, то $z_{k+1} := z$; иначе $z_{k+1} := z_k$.

6. Если $k < n$, то $k := k + 1$ и переходим к пункту 3.

7. Проверяем, выполнено ли условие окончания счета. Если $\alpha < \varepsilon$, то переходим к пункту 10; иначе выполняем пукт 8.

8. Сравниваем два вектора z_{n+1} и z_1. Если они совпадают, то $\alpha := \frac{\alpha}{2}$; иначе $z_1 := z_{n+1}$.

9. Полагаем $k = 1$ и переходим к пункту 3.

10. $x_* := z_{n+1}$, $f_* := f(z_{n+1})$.

Замечание 4. *Кажется естественным, что если мы обнаружили «спуск» по какой-либо координате, то следует «спускаться» в этом направлении до тех пор, пока это возможно. Эта идея реализована в методе локальных вариаций (или прямого поиска). При этом шаг дробится каждый раз после того, как мы перебирем все n координат.*

Метод локальных вариаций особенно эффективен для минимизации функций вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i),$$

где x_i — i-я координата вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Для этого метода мы опишем принципиальный алгоритм, из которого легко получается реализуемая модификация. Итак, пусть $d_1 = e_1$, $d_2 = -e_1$, $d_3 = e_2$, $d_4 = -e_2$, …, $d_{2n-1} = e_n$, $d_{2n} = -e_n$; ρ_0 — параметр метода.

Метод локальных вариаций.

1. Выбираем точку $z_0 \in \mathbb{R}^n$, такую, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(z_0)\}$ ограничено.

2. Полагаем $i = 0$, $z = z_0$, вычисляем $f(z)$.

3. $\rho := \rho_i$.

4. $j := 1$.

5. Вычисляем $f(z + \rho d_j)$.

6. Если $f(z + \rho d_j) < f(z)$, то $z := z + \rho d_j$ и переходим к пункту 5; иначе выполняем пункт 7.

7. Если $j < 2n$, то $j := j + 1$ и переходим к пункту 5; иначе выполняем пункт 8.

8. $z_{i+1} := z$; $\rho_{i+1} := \frac{\rho}{2}$, $i := i + 1$ и переходим к пункту 3.

Для данного алгоритма имеет место теорема сходимости. Ее доказательство можно найти в книге Э. Полака [13].

Теорема 3. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция и существует точка z_0, такая, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(z_0)\}$ ограничено. Тогда последовательность z_i такова, что каждая ее предельная точка $\hat{z}$ удовлетворяет условию $f'(\hat{z}) = 0$.*

Заметим, что теорема 3 аналогична теореме 1. Если функция f является еще и выпуклой на $\mathbb{R}^n$, то последовательность z_i, построенная описанным выше алгоритмом, минимизирует функцию f на $\mathbb{R}^n$ и сходится к множеству точек минимума функции f на $\mathbb{R}^n$.

Рекомендации по программированию. При разработке программ мы советуем использовать реализуемые модификации описанных выше алгоритмов безусловной минимизации, а при отладке – выпуклые функции, такие как

$$u = e^{x+2y-z} + x^2 + 2x + 2y^2 + z^4,$$

$$u = x^2 + 3y^2 + z^8 + \cos(x + y)$$

и упомянутую выше функцию Розенброка. В расширенном варианте функция Розенброка $f(x)$ определяется так:

а) пусть n — любое натуральное число, кратное 2;

б) для $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$

$$f_{2i-1}(x) = 10(x_{2i} - x_{2i-1}^2)$$

$$f_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1};$$

тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Понятно, что программа, реализующая тот или иной численный метод, должна обладать универсальностью. Желательно, чтобы функцию можно было «вводить с экрана». Поэтому советуем подумать о создании «анализатора функций». Задача – трудная, но решаемая. Предлагаем её любителям программирования.

3.3 Минимизация при наличии ограничений

1. Метод штрафных функций. Метод штрафных функций является одним из наиболее простых и широко применяемых методов решения задач минимизации с ограничениями. Основная идея метода заключается в сведении исходной задачи

$$f(x) \to \min, \quad x \in U, \tag{8}$$

где $U \subset \mathbb{R}^n$, к последовательности задач безусловной оптимизации

$$F_k(x) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Здесь $F_k(x)$ — некоторая вспомогательная функция. Она подбирается так, чтобы с ростом номера k эта функция «мало» отличалась от исходной функции $f(x)$ на множестве U и быстро возрастала на множестве $\mathbb{R}^n \backslash U$. Можно ожидать, что быстрый рост функции $F_k(x)$ вне U приведет к тому, что при больших k минимум этой функции на $\mathbb{R}^n$ будет достигаться в точках, близких к множеству U, и решение задачи (9) будет приближаться к решению задачи (8).

Опишем метод штрафных функций для решения задачи (8), где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, U — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Последовательность непрерывных функций $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ называется последовательностью штрафных функций для множества U, если*

1. $\varphi_k(x) = 0$, если $x \in U$, $k \in \mathbb{N}$;

2. $\varphi_k(x) > 0$, если $x \notin U$, $k \in \mathbb{N}$;

3. $\varphi_{k+1}(x) > \varphi_k(x)$, для $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus U$, $k \in \mathbb{N}$;

4. $\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x) = +\infty$, для $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus U$. Заметим, что для любого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ можно указать сколь угодно много различных последовательностей штрафных функций. Например, можно взять

$$\varphi_k(x) = k \operatorname{dist}(x, U), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N},$$

или

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in U \\ k|x - x_0|, & \text{если } x \notin U, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где x_0 — какая-либо точка из U.

Для функций

$$F_k(x) = f(x) + \varphi_k(x)$$

рассмотрим задачу безусловной минимизации (9). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть существует точка $x' \in U$, такая, что множество $M = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant f(x')\}$ ограничено. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ задача (9) имеет решение x_k, и последовательность x_k такова, что любая ее предельная точка является точкой минимума функции f на множестве U.*

◀ По условию множество M ограничено, а в силу непрерывности функции f, еще и замкнуто. Следовательно, M компактно. Поэтому, по теореме Вейерштрасса, задача (8) имеет решение. Ведь

$$\min_{x\in U} f(x) = \min_{x\in M\cap U} f(x).$$

Докажем теперь, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и задача (9) имеет решение. Рассмотрим множества

$$M_k = \{x \in \mathbb{R}^n : F_k(x) \leqslant F_k(x')\}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Заметим, что $M_k \subset M$. Действительно, пусть $x \in M_k$. Тогда

$$f(x) \leqslant f(x) + \varphi_k(x) \leqslant f(x') + \varphi_k(x') = f(x'),$$

так как $x' \in U$ и $\varphi_k(x') = 0$. Из полученного неравенства вытекает указанное вложение. И можно сделать вывод, что M_k компактно для $\forall k \in \mathbb{N}$, как замкнутое подмножество компактного множества M. Очевидно, что для непрерывной функции F_k

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} F_k(x) = \min_{x\in M_k} F_k(x).$$

Поэтому задача (9) имеет решение. Обозначим его через x_k. Пусть $F_k^* = F_k(x_k)$. Докажем, что
$$F_1^* \leqslant F_2^* \leqslant \ldots \leqslant F_k^* \leqslant \ldots \leqslant f_* = \min_{x \in U} f(x).$$

Итак,
$$F_k^* = f(x_k) + \varphi_k(x_k) \leqslant f(x_{k+1}) + \varphi_k(x_{k+1}) \leqslant f(x_{k+1}) + \varphi_{k+1}(x_{k+1}) = F_{k+1}^*$$

для $\forall k \in \mathbb{N}$, и монотонность последовательности F_k^* установлена. Ограниченность вытекает из следующей оценки:
$F_k^* = f(x_k) + \varphi_k(x_k) \leqslant f(x) + \varphi_k(x) = f(x)$ для $\forall x \in U$, откуда,
$$F_k^* \leqslant \min_{x \in U} f(x) = f_*. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь последовательность x_k. Все ее элементы принадлежат компактному множеству M. Поэтому множество предельных точек последовательности x_k непусто. Пусть $\hat{x}$ – элемент из этого множества. Без ограничения общности можем считать, что последовательность x_k сходится (в противном случае переходим к подпоследовательности) и
$$\lim_{k \to \infty} x_k = \hat{x}.$$

Докажем, что $\hat{x}$ – решение задачи
$$f(x) \to \min, \quad x \in U.$$

Последовательность x_k может быть устроена по-разному. Рассмотрим два возможных варианта:
1) $\exists N : \forall k \geqslant N \quad x_k \in U$;
2) существует подпоследовательность x_{k_s} последовательности x_k, такая, что $x_{k_s} \notin U$ для $\forall s \in \mathbb{N}$.

В первом случае сразу получаем, что $\hat{x} \in U$, так как U – замкнутое множество. Далее для любого $k \geqslant N$
$$F_k^* = f(x_k) + \varphi_k(x_k) = f(x_k) \leqslant f_*,$$

в силу (10), откуда следует
$$f(\hat{x}) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) \leqslant f_*.$$

С другой стороны, $f(\hat{x}) \geqslant f_*$, так как $f_* = \min_{x \in U} f(x)$. Из двух последних неравенств вытекает равенство $f(\hat{x}) = f_*$, и, стало быть, $\hat{x}$ – точка минимума функции f на U.

Перейдём ко второму варианту. Докажем, что и в этом случае $\hat{x} \in U$. Предположим противное: $\hat{x} \notin U$. По условию $x_{k_s} \to \hat{x}$ при $s \to \infty$, $x_{k_s} \notin U$. Рассмотрим последовательность $\varphi_{k_s}(x_{k_s})$. Она ограничена. Это следует из ограниченности последовательностей $F_{k_s}(x_{k_s})$ и $f(x_{k_s})$. Действительно,
$$F_{k_s}(x_{k_s}) = f(x_{k_s}) + \varphi_{k_s}(x_{k_s}) \leqslant f_* \quad \forall s \in \mathbb{N},$$

$f(x_{k_s})$ ограничена, так как f непрерывна. Стало быть,

$$\varphi_{k_s}(x_{k_s}) = F_{k_s}(x_{k_s}) - f(x_{k_s}) \leqslant f_* + \sup_s |f(x_{k_s})|.$$

С другой стороны, в силу пункта 4 определения последовательности штрафных функций

$$\varphi_{k_s}(\hat{x}) \to +\infty, \quad s \to \infty, \tag{11}$$

так как $\hat{x} \notin U$. Поэтому последовательность $\varphi_{k_s}(x_{k_s})$ не может быть ограниченной. Действительно, из (11) вытекает, что $\forall E > 0 \quad \exists s_o : \varphi_{k_{s_o}}(\hat{x}) > E$.
Функция $\varphi_{k_{s_o}}$ непрерывна и $x_{k_s} \to \hat{x}$ при $s \to \infty$. Поэтому $\exists n_o > s_o : \varphi_{k_{s_o}}(x_{k_{n_o}}) > E$, но $\varphi_{k_{n_o}}(x_{k_{n_o}}) > \varphi_{k_{s_o}}(x_{k_{n_o}})$ по свойству 3 определения последовательности штрафных функций. Таким образом, мы доказали, что $\forall E > 0 \quad \exists n_o \in N$ такой, что

$$\varphi_{k_{n_o}}(x_{k_{n_o}}) > E,$$

что означает неограниченность последовательности $\varphi_{k_s}(x_{k_s})$. Полученное противоречие позволяет сделать вывод о том, что $\hat{x} \in U$. И, повторяя сказанное ранее, напишем

$$f_* = \min_{x \in U} f(x) \leq f(\hat{x})$$

и

$$F_k^* = f(x_k) + \varphi_k(x_k) \leq f_*,$$

откуда, в силу того что $\varphi_k(x_k) \geq 0$, вытекают неравенства

$$f(x_k) \leq f_*$$

и

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(\hat{x}) \leq f_*.$$

Таким образом,

$$f_* \leq f(\hat{x}) \leq f_* \quad \Leftrightarrow \quad f(\hat{x}) = f_*,$$

то есть $\hat{x}$ – точка минимума функции f на U. ▶

Замечание 5. *Если функция f имеет на U одну точку минимума x_*, то последовательность x_k сходится и $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$.*

Алгоритм метода штрафных функций заключается в построении последовательности x_k. На k-том шаге итерационного процесса находится точка минимума x_k вспомогательной функции $F_k(x)$ в задаче безусловной оптимизации (9). Для численного решения этой промежуточной задачи можно использовать методы, описанные в предыдущем параграфе, например, градиентный или покоординатного спуска.

Отметим, что частным случаем задачи (8) является рассмотренная ранее задача математического программирования

$$f_0(x) \to \min \tag{12}$$

$$f_1(x) \le 0, \dots, f_m(x) \le 0,$$

где $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (i = \overline{0,m})$ – непрерывные функции.

Напомним, что, если в (12) все функции выпуклы, это задача выпуклого программирования. Здесь множество

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \le 0, \quad i = \overline{1,m}\}.$$

Легко доказать, что для множества вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad f_i(x) \le 0, \quad i = \overline{m+1,s}\}, \tag{13}$$

где $f_i (i = \overline{1,s})$ – непрерывные функции, последовательностью штрафных функций будет, например, такая последовательнось: $\varphi_k(x) = A_k \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)|^p + \sum_{i=m+1}^{s} (\max\{f_i(x), 0\})^p, \tag{14}$$

$A_k > 0$ для $\forall k \in N$, $\quad \lim_{k\to\infty} A_k = \infty$, $\quad p \ge 1$ – фиксированное число.

Заметим, что если функции $f_i(x)$ r раз непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$, то при любом $p > r$ функция (14) также будет r раз непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}^n$. Если в (14) $p = 1$, то из непрерывности функций $f_i(x)$ вытекает непрерывность функций $\varphi_k(x)$ на R^n, но не более того. На гладкость при этом рассчитывать не приходится. Ее может и не быть. Если функции $f_i(x)$ при $i = \overline{1,m}$ – линейны, а при $i = \overline{m+1,s}$ – выпуклы, то функция (14) также выпукла.

Другие возможные варианты штрафных функций для множества (13) можно найти в [4].

Пример 2. Методом штрафных функций решим задачу

$$f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 \to \min$$

$$x \in U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 - 3 = 0\}.$$

Заметим, что множество U замкнуто и удовлетворяет условиям теоремы. В качестве последовательности штрафных функций возьмем последовательность

$$\varphi_k(x) = k(x_1 + x_2 - 3)^2, \quad k \in N.$$

Тогда

$$F_k(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 + k(x_1 + x_2 - 3)^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Функция $F_k(x)$ при каждом $k = 1, 2, \dots$ выпукла на $\mathbb{R}^2$ и достигает минимума в точке $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, которая определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0 \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 2k(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 3) = 0 \\ 4x_2^{(k)} + x_1^{(k)} + 2k(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 3) = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Решая (15), находим $x_1^{(k)} = \frac{18k}{8k+7}$, $x_2^{(k)} = \frac{6k}{8k+7}$. Очевидно, что $x^{(k)} \to (\frac{9}{4}; \frac{3}{4})$, а $F_k(x^{(k)}) \to \frac{63}{8}$ при $k \to \infty$. Стало быть,

$$x_* = (2,25; 0,75)\,; \qquad f_* = 7,875.$$

В правильности полученного результата нетрудно убедиться, если перейти к функции одной переменной

$$y = (3 - x_2)^2 + x_2(3 - x_2) + 2x_2^2$$

и исследовать ее на экстремум на $\mathbb{R}$.

Реализуемый алгоритм метода штрафных функций.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ – заданная точность вычислений.
1. Выбираем начальное приближение $x_0 \in \mathbb{R}^n$; $k := 1$.
2. Решаем задачу безусловной минимизации для функции

$$F_k(x_k) = \min_{x \in R^n} F_k(x).$$

3. Проверяем, выполнены ли условия окончания счета:

$$|x_k - x_{k-1}| < \delta, \qquad |f(x_k) - f(x_{k-1}| < \varepsilon. \qquad (16)$$

Если выполнены, переходим к пункту 4; иначе $k := k + 1$ и переходим к пункту 2.
4. Полагаем $x_* := x_k$, $f_* := f(x_k)$.

Замечание 6. *Если функция*

$$F_k(x) = f(x) + A_k\varphi(x),$$

то можно положить $A_k = \frac{1}{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}$ *(*ε_0 *– параметр метода) или* $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. *Далее, при решении задач безусловной оптимизации в пункте 2 использовать точность* ε_k. *Если потребовать, чтобы* k *принимало лишь четные значения, то условия (16) пункта 3 можно попробовать заменить на условия:*

$$|x_k - x_{k/2}| < \delta; \qquad |f(x_k) - f(x_{k/2}| < \varepsilon.$$

2. Метод проекции градиента. Рассмотрим задачу условной минимизации

$$f(x) \to \min, \ x \in U, \qquad (17)$$

где $U \subset \mathbb{R}^n$, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на U. Мы уже знаем, что для минимизации таких функций можно использовать градиентные методы.

Но, если применить описанный в пункте 1 раздела 3.2 тот или иной вариант градиентного метода к решению задачи (17), могут возникнуть трудности. Ведь в последовательности x_k, построенной по алгоритму метода, точка x_k при каком-то k может и не принадлежать множеству U. Чтобы избежать этого, можно попробовать проектировать при каждом $k \in \mathbb{N}$ точку $x_k - \alpha_k f'(x_k)$ на множество U. В результате мы придем к так называемому методу проекции градиента. Итак, пусть $x_0 \in U$ – некоторое начальное приближение. Строим последовательность $x_k, k \in \mathbb{N}$ по правилу:

$$x_{k+1} = P_U(x_k - \alpha_k f'(x_k)), \tag{18}$$

где α_k – последовательность, определяемая выбранным вариантом градиентного метода, P_U – проектор на множество U. Если U - выпуклое замкнутое множество, то в силу теоремы 4.4.1 из [4] последовательность x_k будет однозначно определяться условием (18). Далее, если в (18) на некоторой итерации точка x_{k+1}совпадет с x_k (например, это случится при $f'(x_k) = 0$), то процесс (18) прекращается. В этом случае точка x_k удовлетворяет необходимому условию оптимальности

$$x_k = P_U(x_k - \alpha_k f'(x_k))$$

(см. теорему 4.4.3 из [4]) и для выяснения того, является ли в действительности x_k решением задачи (17) или нет, при необходимости нужно провести дополнительное исследование поведения функции $f(x)$ в окрестности точки x_k. В частности, если $f(x)$ – выпуклая функция, то такая точка – решение задачи (17). В общем случае вычисления по формуле (18) завершаются при выполнении одного из неравенств

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon; \qquad |f'(x_k)| < \varepsilon, \tag{19}$$

где величина ε определяет точность решения задачи. Далее полагают $x_* := x_k$, $f_* := f(x_k)$.

Комментарии. На каждом шаге описанного итерационного процесса нужно проектировать точку на множество U. Однако задача отыскания проекции некоторой точки u на заданное множество, сама, в свою очередь, является задачей минимизации функции $g(u) = |v - u|$ или $g(u) = |v - u|^2$ на этом множестве и далеко не всегда просто решается. Поэтому методом проекции градиента обычно пользуются лишь в тех случаях, когда проекция точки на множество легко определяется. Например, если множество U представляет собой шар в $\mathbb{R}^n$, параллелепипед, гиперплоскость, полупространство или положительный октант, то задача проектирования точки решается просто и в явном виде. Если же задача проектирования для своего решения требует применения тех или иных итерационных алгоритмов, то эффективность метода проекции градиента, вообще говоря, значительно снижается.

Замечание 7. *Подробное обоснование сходимости метода можно найти в работе [4].*

3. Метод условного градиента. Используется для численного решения задачи условной минимизации

$$f(x) \to \min, x \in U, \tag{20}$$

где U – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на U. Опишем его. Пусть $x_0 \in U$ – некоторое начальное приближение. Если известно k-е приближение $x_k \in U, k \in \mathbb{N}$, к решению задачи (20), причем $f'(x_k) \neq 0$, то приращение функции $f(x)$ в точке x_k можно представить в виде

$$f(x) - f(x_k) = (f'(x_k), x - x_k) + o(|x - x_k|).$$

Рассмотрим линейную функцию

$$f_k(x) = (f'(x_k), x - x_k) \tag{21}$$

и определим вспомогательное приближение $\overline{x}_k$ из условий

$$\overline{x}_k \in U, \quad \inf_U f_k(x) = f_k(\overline{x}_k) = (f'(x_k), \overline{x}_k - x_k) \tag{22}$$

Так как множество U замкнуто и ограничено, а линейная функция $f_k(x)$ непрерывна, то точка $\overline{x}_k$ из (22) всегда существует. Если функция $f_k(x)$ достигает своей точной нижней грани на U более чем в одной точке, то в качестве x_k возьмем любую из них. Таким образом, $\overline{x}_k$ – решение вспомогательной задачи

$$f_k(x) \to \min, \ x \in U. \tag{23}$$

Следующее приближение x_{k+1} найдем по формуле

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k(\overline{x}_k - x_k), \ \alpha_k \in (0, 1) \tag{24}$$

В силу выпуклости множества U, точка $x_{k+1} \in U$. Элементы последовательности $\alpha_k, \ k = 0, 1, ...$ из (24) в различных вариантах метода условного градиента вычисляются по-разному. Опишем три возможных способа определения α_k.

1. $\alpha_k = \min(1, \hat{\alpha_k})$, где $\hat{\alpha_k}$ находится из условия одномерной минимизации функции $\Phi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha(\overline{x}_k - x_k))$ по направлению $(\overline{x}_k - x_k)$, то есть

$$\Phi_k(\hat{\alpha_k}) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha) \tag{25}$$

2. Величины α_k в (24) априорно задаются условиями

$$0 < \alpha_k \leq 1, \ \lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \tag{26}$$

например, $\alpha_k = (k+1)^{-1}, \ k = 0, 1, ...$. Такой выбор α_k очень прост для реализации на ЭВМ, но, вообще говоря, не гарантирует выполнение условия монотонности:

$$f(x_{k+1}) < f(x_k). \tag{27}$$

3. В начале выполнения итерации (24) полагают $\alpha_k = 1$, после чего проверяют условие (27). Если оно не выполнено, то α_k уменьшают в 2 раза и повторно

проверяют (27). Дробление α_k производят до выполения неравенства (27), после чего переходят к следующей итерации (24).

Условие окончания вычислений по методу условного градиента совпадает с аналогичным условием (19) метода проекции градиента. Обоснование сходимости описанного метода можно найти в [4].

Комментарии. Отметим, что вспомогательная задача (23) минимизации линейной функции (21) на множестве U является задачей нелинейного программирования и может непросто решаться. Укажем случаи, когда поиск ее решения $\overline{x}_k$ не представляет затруднений.

1. Допустимое множество U задано линейными ограничениями и условием неотрицательности переменных. Тогда (23) – задача линейного программирования и ее решение можно найти с помощью симплекс-метода.
2. Множество $U = \{u \in \mathbb{R}^n : a_j \le u_j \le b_j,\ j = 1, ..., n\}$ – n-мерный параллелепипед.
3. Множество $U = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - a| \le b\}$ – шар радиуса b с центром в точке a. Тогда

$$x_k = a - b\frac{f'(x_k)}{|f'(x_k)|}.$$

Глава 4

Использование специальных программ для решения задач оптимизации

4.1 Программы для решения математических задач

В арсенале современного специалиста имеется большое количество готовых программных продуктов, позволяющих решать различные математические задачи, в том числе задачи оптимизации. Эта область бурно развивается, постоянно выходят новые версии программ, поэтому данную главу следует рассматривать лишь как краткое введение в эту тематику.

В данной главе будут рассмотрены некоторые возможности, имеющиеся для решения задач оптимизации в двух известных программах Microsoft Excel и Wolfram Mathematica. Эти программы представляют два важных класса программных продуктов.

Microsoft Excel – это часть популярного пакета офисных программ Microsoft Office. Программа рассчитана на самые широкие круги пользователей и, в силу этого, обладает интуитивно понятным интерфейсом. С помощью такой программы довольно сложные задачи могут решать даже пользователи, далекие от математики. Требуется лишь уметь выписать условия задачи и запустить Мастер – функцию, проводящую пользователя через этапы решения шаг за шагом. Более подробно с возможностями программы можно ознакомиться по книге [7].

Wolfram Mathematica – это продукт, ориентированный в первую очередь на специалистов: математиков, физиков, инженеров и т. д. Для решения задач в этой системе может потребоваться некоторое знакомство с программированием. Преимуществом таких программ является возможность большего контроля над процессом решения задачи. Подробное описание программы содержится в книге [8].

Мы будем предполагать, что читатель имеет начальные знания в этой области и ограничимся обзором имеющихся в этих программах средств решения оптимизационных задач.

Кроме упомянутых программ, отметим также следующие программные продукты, имеющие средства для решения задач оптимизации: MatLab (производитель Mathworks Inc.) и Maple (Waterloo Maple Inc.).

4.2 Оптимизация в Wolfram Mathematica

Примеры данного параграфа были выполнены с использованием версии Mathematica 5. Отметим, что в пятой версии системы появились некоторые новые функции для решения задач оптимизации. Как уже говорилось, мы предполагаем некоторое знакомство пользователя с этой программой. Напомним, что для выполнения команды в системе Mathematica нужно ввести выражение в одну из ячеек рабочей книги (в терминологии системы – notebook) и нажать Shift+Enter.

Описание настроек алгоритмов и параметров отображения данных можно найти в справочной системе программы.

В программе Mathematica многие функции реализованы в двух вариантах – символьном и численном. При использовании символьного варианта команд программа пытается найти точное выражение для решения задачи (например, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$). При использовании численных функций решение производится одним из численных алгоритмов и результат будет представлен в виде десятичной дроби (например, $x = 0.707107$). При попытке решить задачу теоретически выражение для решения часто оказывается неприемлемо сложным.

Для символьного нахождения глобального минимума или максимума функции, используются функции Minimize и Maximize соответственно.

Пример. Найдем минимум и максимум функции $f(x) = x^2 - x^4$. График функции приведен на рис. 1, результаты выполнения команд показаны на рис. 2.

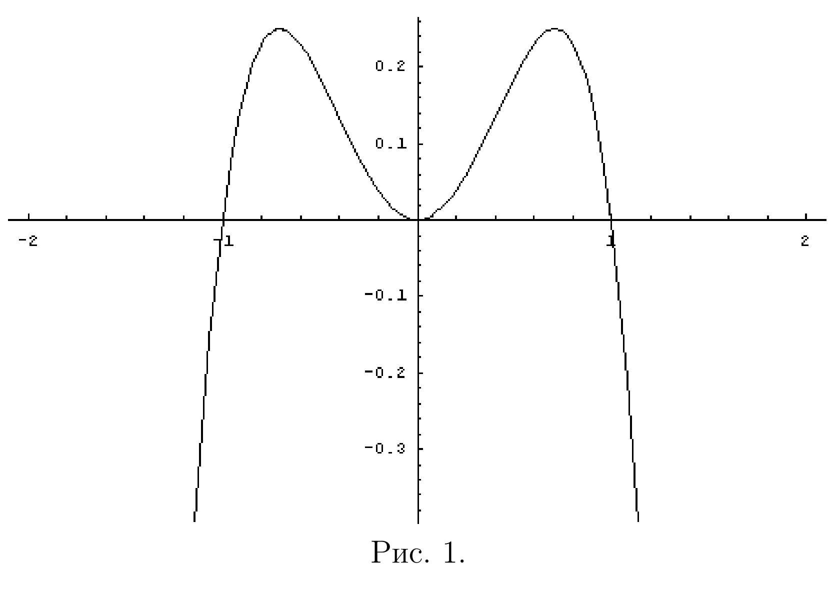

Рис. 1.

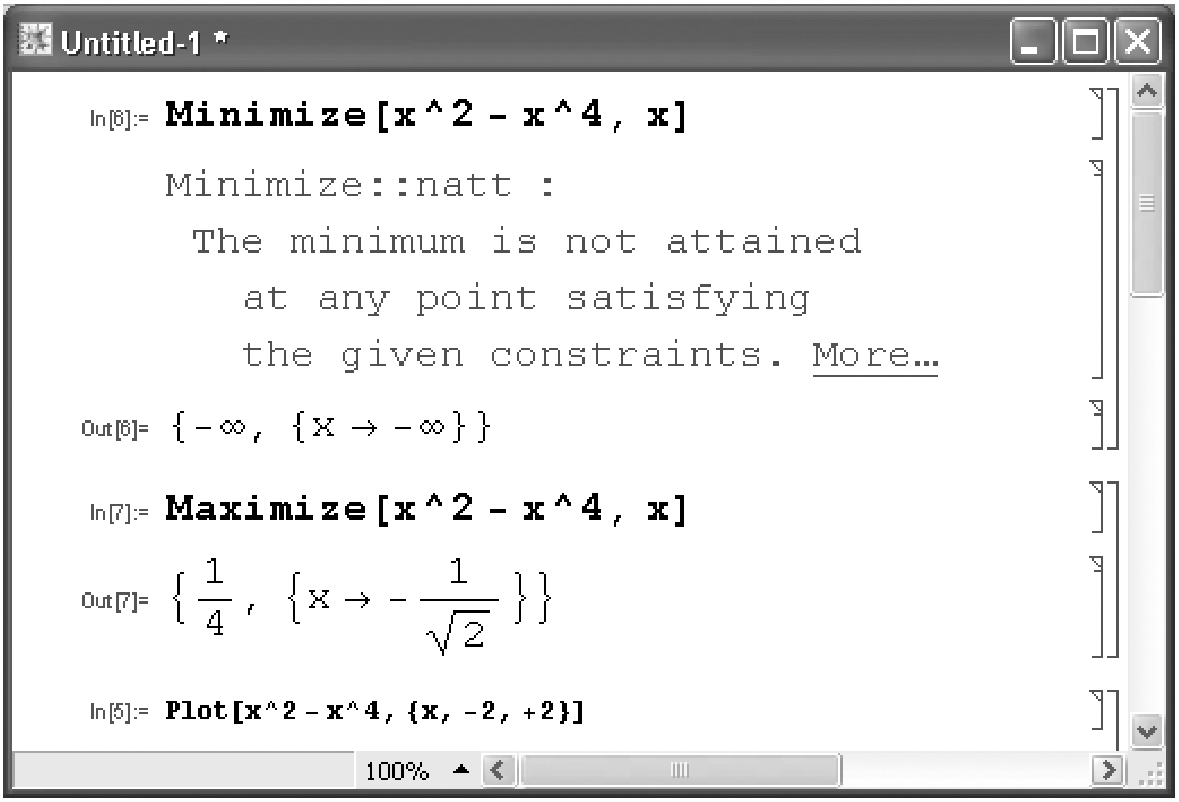

Рис. 2.

Программа успешно справилась с задачей об отыскании максимума функции, но нашла только одну из точек, в которой этот максимум достигается. Рассматриваемая функция неограничена снизу. При попытке найти ее минимум программа выдала соответствующее предупреждение и указала в качестве варианта решения $-\infty$ при $x = -\infty$.

Полный формат функций Maximize и Minimize:

Maximize[f, $\{x, y, \dots\}$] максимизирует выражение f как функцию переменных x, y, ...

Maximize[$\{f$, cons$\}$, $\{x, y, \dots\}$] максимизирует выражение f как функцию переменных x, y, ... с учетом ограничений cons.

Minimize[f, $\{x, y, \dots\}$] минимизирует выражение f как функцию переменных x, y, ...

Minimize[$\{f$, cons$\}$, $\{x, y, \dots\}$] минимизирует выражение f как функцию переменных x, y, ... с учетом ограничений cons.

В качестве выражения cons может быть использован набор линейных и нелинейных неравенств или их логическое объединение.

Приведем пример минимизации фунции двух переменных с ограничениями.

Пример. Найдем минимум и максимум функции $f(x) = x + y$ при $x^2 + y^2 \leq 1$. Результаты выполнения команд показаны на рис. 3.

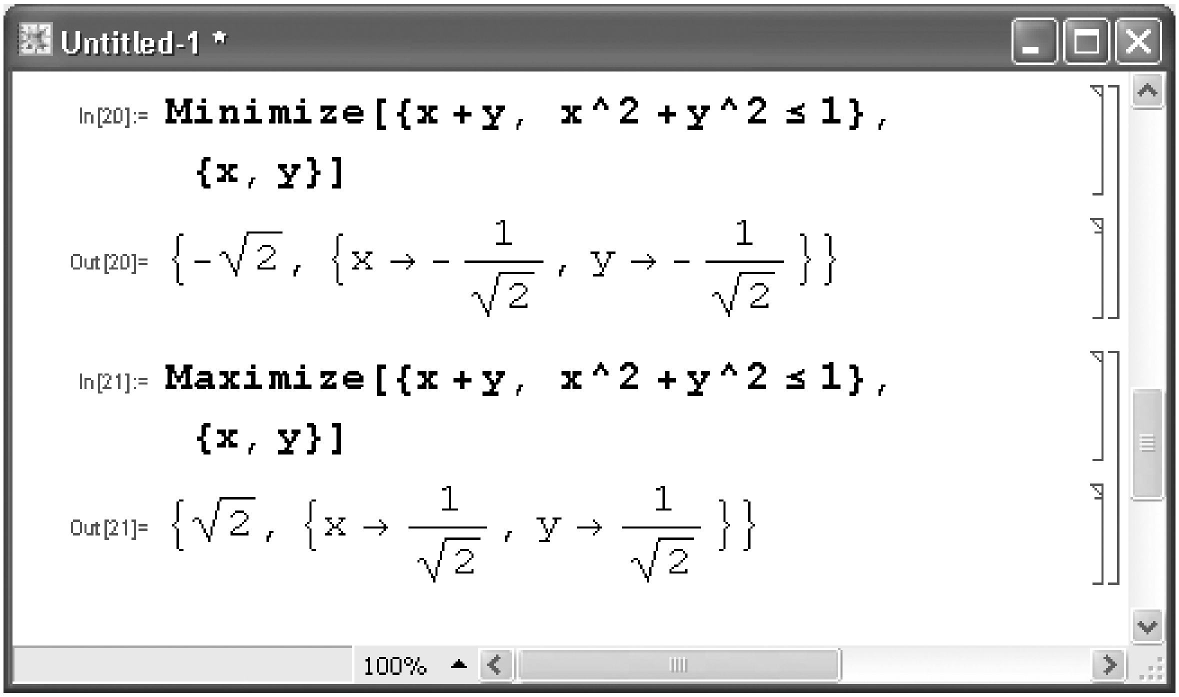

Рис. 3.

Численными аналогами функций Maximize и Minimize являются функции NMaximize и NMinimize. Формат вызова этих функций такой же, как и их символьных аналогов. Решение последней задачи с использованием NMaximize и NMinimize показано на рис. 4.

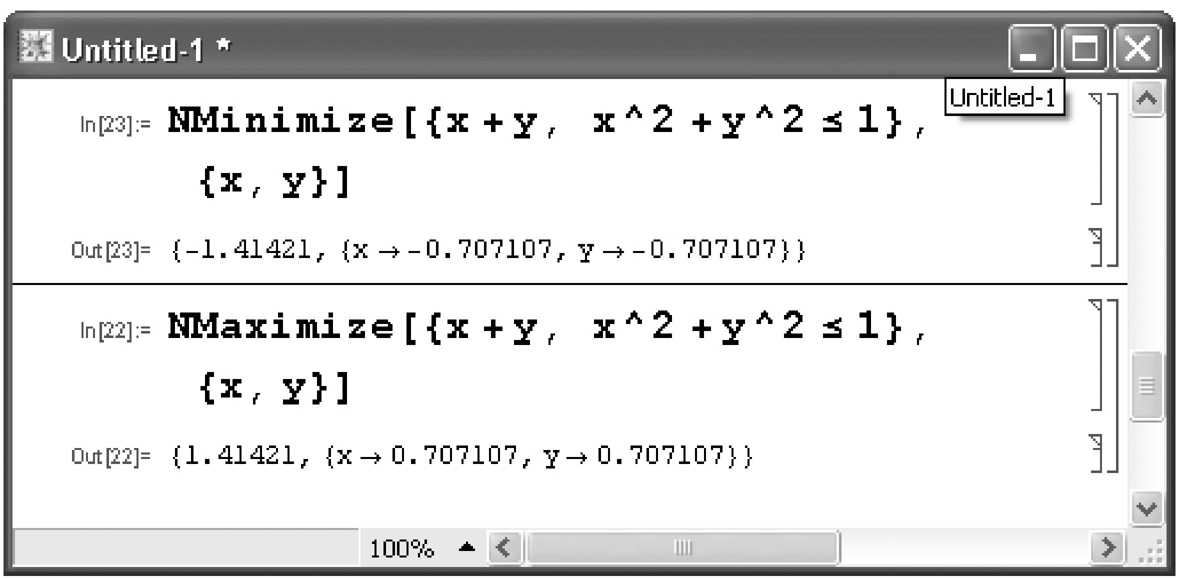

Рис. 4.

Для отыскания локальных экстремумов предусмотрены численные функции:

FindMaximum[f, $\{x,x_0\}$] – поиск локального максимума функции f при начальном приближении $x = x_0$.

FindMinimum[f, { {x,x_0},{y,y_0},...}] – поиск локального минимума функции f при начальном приближении $x = x_0$, $y = y_0$,...

Пример. В качестве примера найдем минимум функции $f(x) = \cos x$ при начальном приближении $x_0 = 3.0$ (см. рис. 5).

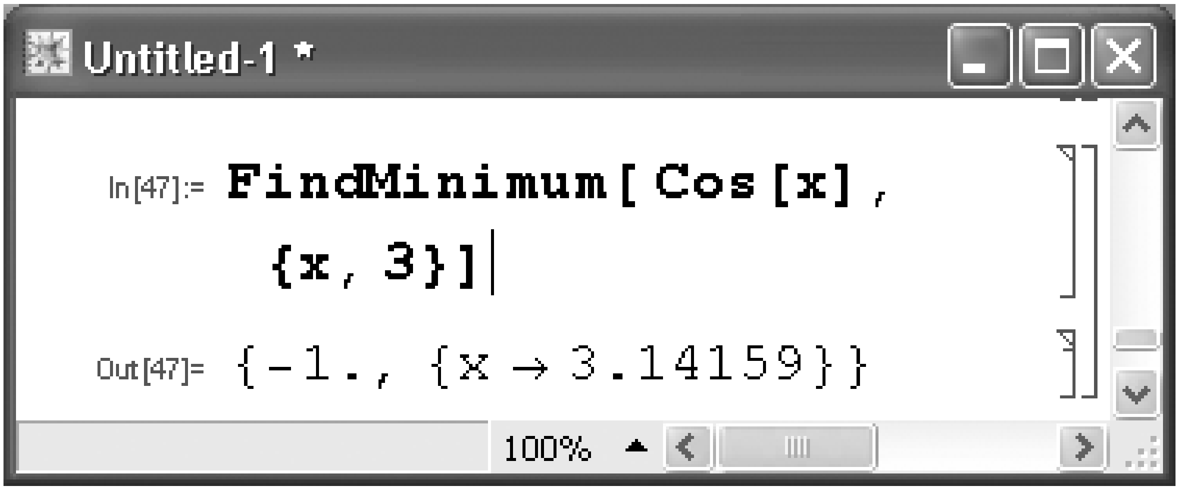

Рис. 5.

Если все ограничения линейны, можно использовать функцию LinearProgramming. Эта функция имеет следующий формат:

LinearProgramming[c,m,b] находит вектор x, минимизирующий выражение (c, x), при условиях $(m, x) \geq b$ и $x \geq 0$.

или

LinearProgramming[c,m,b,l] находит вектор x, минимизирующий выражение (c, x), при условии $(m, x) \geq b$ и $x \geq l$.

Пример. Решим задачу линейного программирования

$$x + 4y \to \min$$

$$\begin{cases} x + y & \geq & 0 \\ -x + y & \geq & 0 \\ -y & \geq & -1. \end{cases}$$

На рис. 6. приведены два решения этой задачи – с помощью функции Minimize и с помощью функции LinearProgramming.

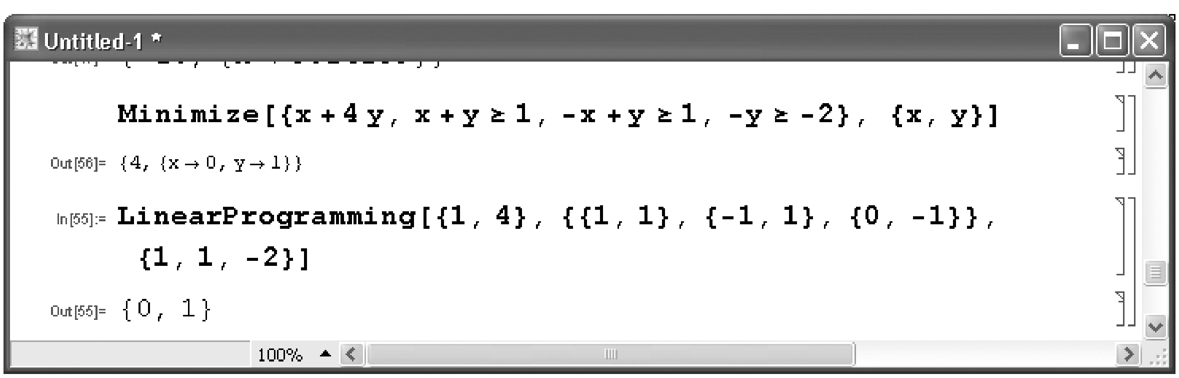

Рис. 6.

4.3 Оптимизация в MS Excel

Для решения задач оптимизации в программе MS Excel имеется инструмент Solver (в русской версии – Поиск решения). Этот инструмент является одной из так называемых надстроек (add-ins) и может отсутствовать в составе программы на некоторых компьютерах. При установке MS Office на компьютер следует убедиться, что данная надстройка выбрана в числе устанавливаемых компонентов. Кроме того, если команда Solver (Поиск решения) отсутствует в меню Tools (Сервис), следует открыть окно Add-ins (Надстройки), выполнив команду Tools | Add-ins (Сервис | Надстройки) и отметить Solver (Поиск решения) в списке установленных надстроек.

Инструмент Solver позволяет решать как линейные, так и нелинейные задачи оптимизации. Как обычно следует задать целевую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и систему ограничений, накладываемых на переменные $x_1, \ldots, x_n$. Система ограничений может включать ограничения типа равенств и типа неравенств. Solver допускает три режима оптимизации $f(x_1, \ldots, x_n) \to \max$, $f(x_1, \ldots, x_n) \to \min$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = A$, где A – заданное числовое значение.

Все данные для решения и результаты вычислений хранятся в ячейках рабочего листа MS Excel. Удобнее хранить однотипные данные в ячейках, расположенных рядом, или, пользуясь терминологией MS Excel, в ячейках, образующих диапазон. Это облегчает ввод данных и выделение их при постановке задачи для инструмента Solver.

Для решения задачи оптимизации следует выполнить следующие действия:

1. Выбрать ячейки, которые будут использоваться в качестве независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, значения которых программа должна определить. Сначала эти ячейки могут быть пустыми. В случае успешного решения задачи программа заполнит их найденными значениями.

2. Ввести в некоторую ячейку целевую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Функция должна быть записана по правилам составления формул в программе MS Excel. В качестве параметров следует использовать ячейки, выбранные в пункте 1. В случае успешного решения задачи программа поместит в эту ячейку найденное оптимальное значение целевой функции.

3. Выбрать ячейки для хранения левых и правых частей системы ограничений и ввести соответствующие данные. Части ограничений должны быть записаны в виде формул и быть выражены через ячейки независимых переменных, выбранные в пункте 1.

4. Выполнить команду меню Tools | Solver (Сервис | Поиск решения). Откроется диалог Solver Parameters (Поиск решения) (см. рис. 7).

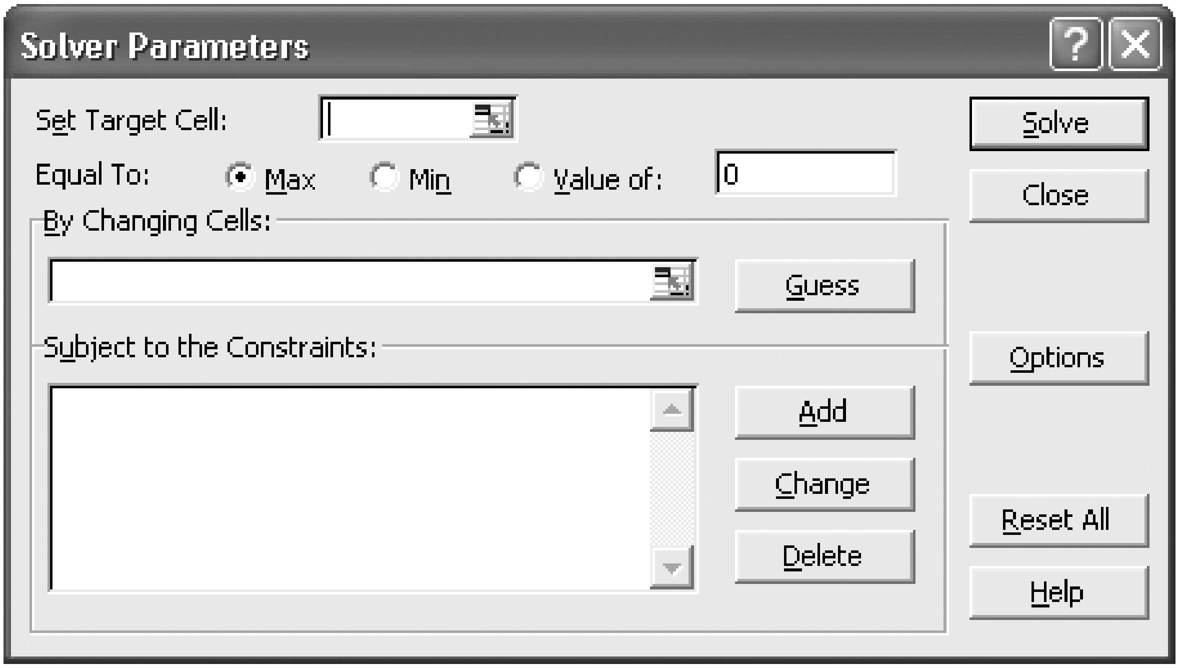

Рис. 7.

В этом окне следует указать, где находятся данные для решения задачи. Ссылки на ячейки можно ввести вручную, но удобнее выделить соответствующее поле в окне и выделить саму ячейку (или диапазон ячеек) на рабочем листе. Опишем назначение элементов окна Solver Parameters.

Поле Set Target Cell (Установить целевую ячейку) должно содержать указание на целевую ячейку, выбранную в пункте 2.

Переключатель («радиокнопка») Equal To (Равной) позволяет указать тип решаемой задачи оптимизации: максимизация, минимизация или равенство заданному значению. В последнем случае желаемое значение целевой функции нужно ввести в специальное поле.

Поле By Changing Cells (Изменяя ячейки) должно содержать список ячеек (диапазонов), выбранных в пункте 1. Расположенная рядом с полем кнопка Guess (Предположить) позволяет автоматически ввести в данное поле имена всех ячеек, не содержащих формул, использованных в описании целевой функции.

В поле Subject to the Constrains (Ограничения) нужно ввести список ограничений. Для добавления, изменения и удаления элементов списка используются кнопки, расположенные рядом с полем – Add (Добавить), Change (Изменить), Delete (Удалить) соответственно. Нажатие кнопок Add или Change открывает дополнительное диалоговое окно, позволяющее отредактировать ограничение (см. рис. 8).

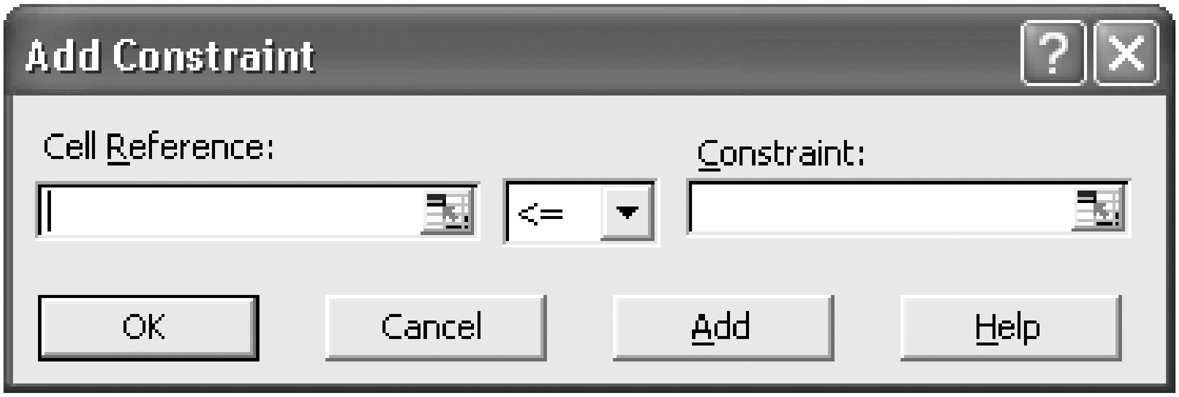

Рис. 8.

В этом окне в поле Cell Reference (Ссылка на ячейку) нужно ввести адрес ячейки, содержащей левую часть ограничения; в поле Constraint (Ограничение) – правую часть ограничения. Знак между частями выражения выбирается из выпадающего списка. Возможные значения: $>=$, $<=$, $=$, Int, Bin. Смысл первых трех знаков очевиден. Знак Int позволяет потребовать, чтобы переменная в левой части принимала только целые значения, знак Bin – чтобы переменная в левой части принимала только бинарные значения (т. е. только значения ноль или единица).

После того как все данные введены, можно попытаться решить задачу, нажав кнопку Solve (Выполнить). После решения задачи откроется диалог Solver Results (Результат поиска решения) с отчетом о результате. В случае удачного решения выдается сообщение «Solver found a solution. All constraintsand optimality conditions are satisfied» («Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены»). В случае, если найти решение не удалось, данное диалоговое окно будет содержать сообщение о возникших проблемах.

Инструмент Solver позволяет настраивать параметры своей работы. В большинстве случаев целесообразно вначале попробовать решить задачу с помощью параметров, установленных по умолчанию. В случае, если решение найти не удалось, имеет смысл поэкспериментировать с настройками. Окно настроек Solver Options (Параметры поиска решения) можно открыть, нажав кнопку Options (Параметры) окна Solver Parameters.

Пример. Решим нелинейную задачу оптимизации

$$f(x) = x^2 + y^2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x + y &= 3 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{cases}$$

Для хранения переменных x, y будем использовать ячейки A1, A2.

В ячейку B3 введем целевую функцию =3*A1+A2.

Правые части ограничений введем в ячейки A5:A7.

=3*A1+A2

=A1

=A2

Левые части ограничений – в ячейки B5:B7.

3

0

0

Состояние рабочего листа после введения данных задачи показано на рис. 9.

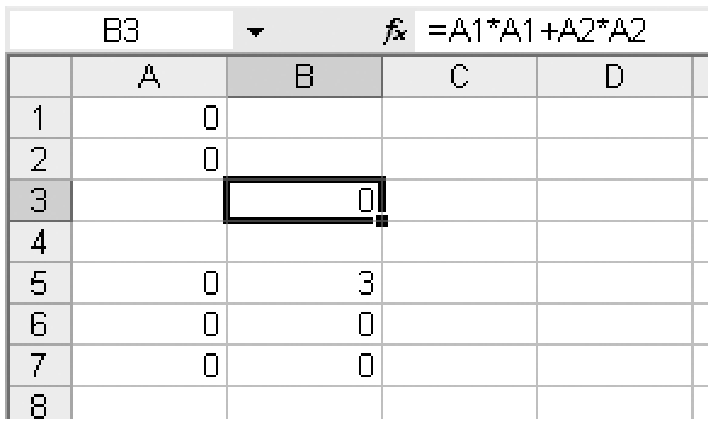

Рис. 9.

В MS Excel значением пустых ячеек является ноль, поэтому в нашем случае на данном этапе в ячейках, содержащих формулы, отображаются нули.

Окно Solver Parameters после заполнения всех полей показано на рис. 10.

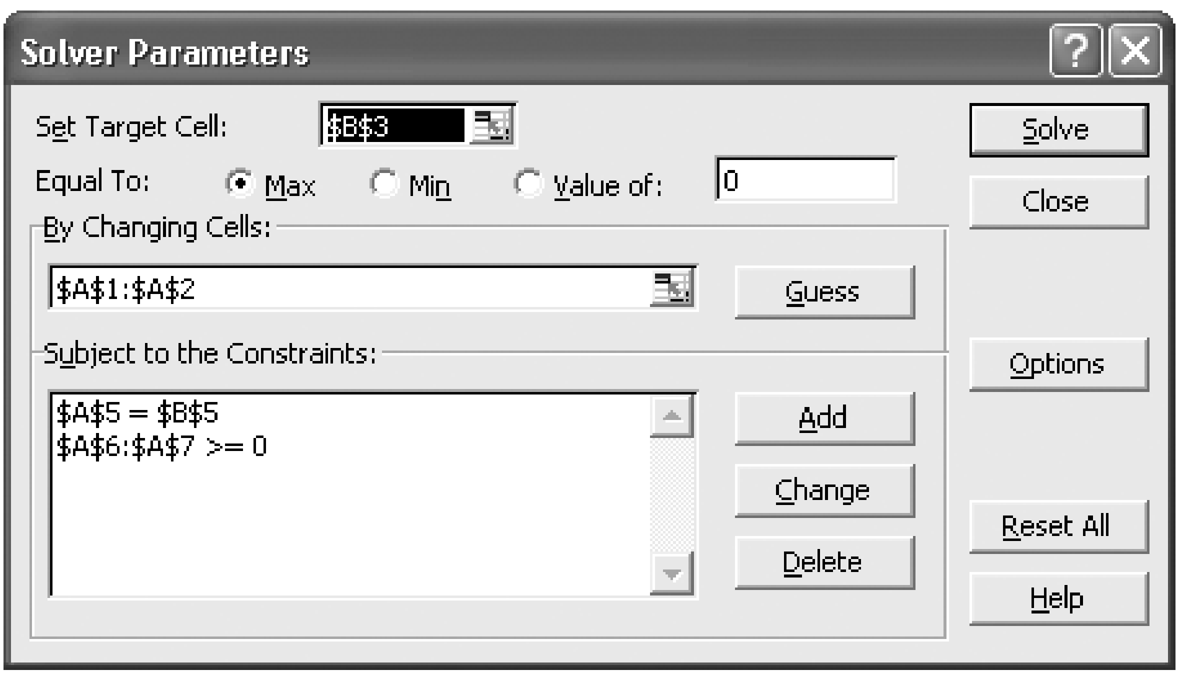

Рис. 10.

Состояние рабочего листа и диалог отчета после решения задачи показаны на рис. 11.

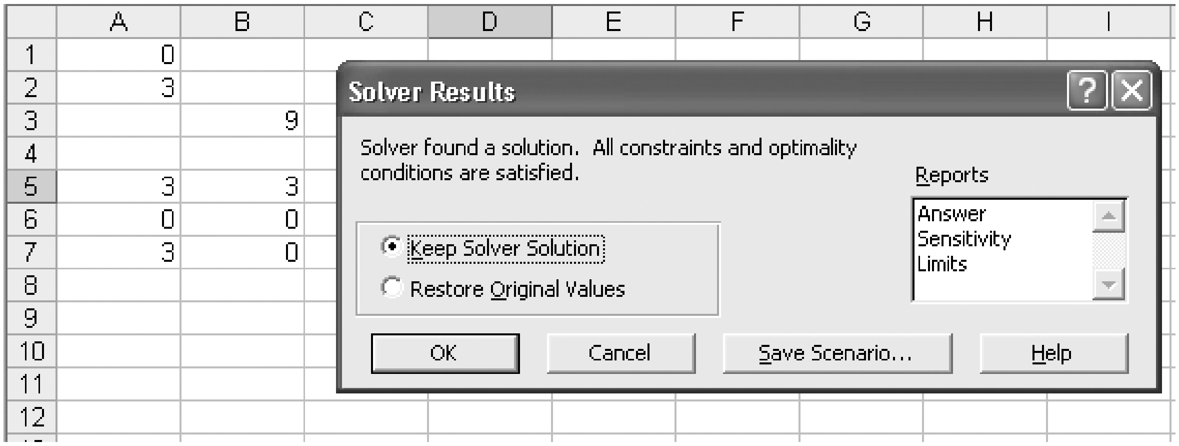

Рис. 11.

Полученное оптимальное значение целевой функции 9 находится в ячейке B3. Значения x и y, доставляющие решение задачи, находятся в ячейках A1 и A2 соответственно, это 0 и 3. Для завершения работы Solver нужно закрыть диалог, нажав кнопку OK.

Литература

[1] Ашманов, С.А. Линейное программирование/ С.А. Ашманов. — М.: Наука, 1981.

[2] Ашманов, С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях/ С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. — М.: Наука, 1991.

[3] Бобылёв, Н.А. Методы нелинейного анализа в задачах негладкой оптимизации/ Н.А. Бобылёв, В.С. Климов. — М.: Наука, 1992.

[4] Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач/ Ф.П. Васильев. — М.: Наука, 1980.

[5] Габасов, Р. Методы оптимизации/ Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. — Минск, Изд-во БГУ, 1975.

[6] Гавурин, М.К Экстремальные задачи при линейных ограничениях/ М.К. Гавурин, В.Н. Малозёмов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.

[7] Гарнаев, А.Ю. Excel, VBA, Internet в экономике и финансах/ А.Ю. Гарнаев. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002.

[8] Дьяконов, В.П. Mathematica 4: учебный курс/ В.П. Дьяконов. — СПб: Питер, 2001.

[9] Карманов В.Г. Математическое программирование/ В.Г. Карманов. — М.: Наука, 1986.

[10] Люстерник, Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники/ Л.А. Люстерник. — М.: Гостехиздат, 1956.

[11] Магарил-Ильяев, Г.Г. Выпуклый анализ и его приложения/ Г.Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[12] Моисеев, Н.Н. Методы оптимизации/ Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова. — М.: Наука, 1978.

[13] Полак, Э. Численные методы оптимизации/ Э. Полак. — М.: Мир, 1974.

[14] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию/ Б.Т. Поляк. — М.: Наука, 1983.

[15] Пшеничный, Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи/ Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1980.

[16] Рокафеллар, Р.Т. Выпуклый анализ/ Р.Т. Рокафеллар. — М.: Мир, 1973.

[17] Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации/ А.Г. Сухарев , А.В. Тимохов, В.В. Фёдоров. — М.: Наука, 1986.

[18] Тихомиров, В.М. Рассказы о максимумах и минимумах/ В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1986.

[19] Численные методы в экстремальных задачах. Часть I.: методические указания. /Сост. Т.Г. Бычкова; Яросл. гос. ун-т. — Ярославль: ЯрГУ, 1993.

.

Учебное издание

Климов Владимир Степанович
Бычкова Татьяна Галиковна
Ухалов Алексей Юрьевич

Конечномерная оптимизация

Учебное пособие

Редактор, корректор М.В. Никулина
Компьютерная верстка А. Ю. Ухалова
Подписано в печать 21.04.2008. Формат 60 x 84/8.
Бумага тип. Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 5,25.
Тираж 150 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет.
150044 Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37,
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.