Министерство образования и науки
Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

М. В. Невский

Элементы теории функций комплексного переменного

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
Компьютерная безопасность

Ярославль
ЯрГУ
2014

УДК 517.53(075)
ББК В161.55я73
Н40

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия. План 2014 года

Рецензенты:

кафедра математического анализа Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского;

Д. О. Бытев, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Ярославского государственного технического университета.

Н40 **Невский, Михаил Викторович.**

Элементы теории функций комплексного переменного : учебное пособие / М. В. Невский ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2014. – 106 с.

ISBN 978-5-8397-0994-2

В учебном пособии рассматриваются вопросы, связанные с содержанием дисциплины "Теория функций комплексного переменного". Даются сведения теоретического характера, примеры решения задач, формулируется значительное количество упражнений по основным темам. Приводятся доказательства теорем из ряда разделов дисциплины.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 090301.65 Компьютерная безопасность (дисциплина "Теория функций комплексного переменного", цикл С2), очной формы обучения.

УДК 517.53(075)
ББК В161.55я73

ISBN 978-5-8397-0994-2

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности "Компьютерная безопасность", но может использоваться студентами и других математических направлений. Оно базируется на материалах автора по дисциплине "Теория функций комплексного переменного", лектором которой на математическом факультете ЯрГУ автор является более десяти лет. В учебном пособии рассматривается значительная часть вопросов, составляющих содержание дисциплины "Теория функций комплексного переменного" (ТФКП) для указанной специальности.

В первой главе пособия собран материал, который поможет читателю приобрести навыки в решении задач по основным разделам ТФКП. В каждом параграфе этой главы сначала излагаются нужные теоретические сведения (без доказательств), затем, как правило, даются примеры решения задач, после чего формулируются упражнения для самостоятельной работы. Однотипные задачи разбиты на 10 или на 5 вариантов, что даёт возможность использовать их в контрольных заданиях в группе студентов. Для заинтересованных читателей приводятся некоторые дополнительные упражнения. Общее число всех упражнений — около 400. Первая глава написана на основе методических указаний автора [6], успешно применявшихся в учебном процессе.

Во второй главе излагается теоретический материал, касающийся избранных тем ТФКП. Здесь формулируются и доказываются некоторые основные теоремы дисциплины. В этой части пособия многие понятия и результаты, уже упоминавшиеся в первой главе, рассматриваются вновь, но уже с теоретической точки зрения. Автор убежден, что самостоятельный разбор доказательств поможет сформировать у студента более глубокие знания по предмету. Эта форма занятий эффективно дополнит решение упражнений из первой главы.

Основному содержанию учебного пособия предшествует введение, в котором излагаются краткие исторические сведения, а также даётся общее описание проблематики ТФКП и основных разделов дисциплины. При написании этой части использовалось учебное пособие [5].

В приложении даются методические материалы, ознакомление с которыми представляется полезным для студентов, начавших изучение ТФКП. К этим материалам относятся выдержки из рабочей учебной программы и программы государственного итогового междисциплинарного экзамена по специальности "Компьютерная безопасность", а также примерная программа зачёта по ТФКП.

Таким образом, изложение материала в учебном пособии не является традиционно линейным. В тексте неоднократно осуществляется возврат к ранее встречавшимся или только обозначенным вопросам, их повторение с новой точки зрения. Автор надеется, что такой подход будет способствовать более эффективному формированию у студентов тех компетенций, которые обозначены Федеральным государственным образовательным стандартом.

Материал учебного пособия не охватывает всех вопросов программы данной дисциплины. Для более систематического изучения ТФКП студенты могут использовать, например, учебники [7], [8] и учебные пособия [1], [2], [4].

Нумерация параграфов и формул осуществляется в пределах каждой главы. При ссылках на параграф данной главы её номер не указывается. При ссылках на параграф другой главы вместе с его номером даётся и номер главы. В конце пособия приводится указатель имён, а также годы жизни тех математиков, которые упоминаются в тексте учебного пособия. Автор убеждён, что представление об истории науки и её творцах является весьма важным для грамотного специалиста.

Введение. Краткие исторические сведения

Комплексные числа — важный инструмент и язык современной математики. Их алгебраическая природа состоит в том, что поле $\mathbb{C}$ является расширением поля $\mathbb{R}$ действительных чисел, получающимся алгебраическим присоединением к $\mathbb{R}$ корня i многочлена $f(x) = x^2 + 1$. При этом поле $\mathbb{C}$ является минимальным раширением поля $\mathbb{R}$ в следующем смысле: каждое поле, содержащее подполе, изоморфное $\mathbb{R}$, содержит и подполе, изоморфное $\mathbb{C}$.

Одно из важнейших свойств поля $\mathbb{C}$ состоит в его *алгебраической замкнутости*: любой многочлен степени $n \geq 1$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$ имеет, по крайней мере, один комплексный корень. Это так называемая *основная теорема алгебры*, называемая также *теоремой Даламбера – Гаусса.*

Комплексные числа имеют свою длительную и интересную историю. Впервые мнимые величины появились в работах итальянских математиков 16 в. Кардано, Бомбелли и др. для получения действительных корней уравнений 3 степени. Дж. Кардано (G. Cardano, 1545) счёл их непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин при решении кубического уравнения (оказалось, что действительные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин) впервые оценил Р. Бомбелли (R. Bombelli, 1572). Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами. Как пример одного из самых древних приведём следующее тождество Бомбелли:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4.$$

Выражения вида $a+b\sqrt{-1},\ b \neq 0$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть *мнимыми.* Термин *imaginaire (мнимый, воображаемый)* впервые употребил Р. Декарт (R. Descartes, 1637). Начиная со второй половины 17 в. математики всё более уверенно пользовались символом $\sqrt{-1}$, причём не только в алгебраических тождествах, но и в аналитических формулах для функций. К этому времени А. де Муавром (A. de Moivre, 1707, 1722) и Р. Котесом (R. Cotes, опубликовано в 1722 г.) была решена задача извлечения корня n-й степени из комплексного числа. Формулы для умножения в тригонометрической форме и извлечения корня с тех пор называют *формулами Муавра* (чаще это название относится к первой из них). В 1748 г. Л. Эйлер (L. Euler) вывел свою знаменитую формулу

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

носящую теперь его имя. Это тождество лежит в основе перехода к так называемой показательной форме комплексного числа $z = re^{i\varphi}$. В случае

$\varphi = \pi$ получаем знаменитое равенство $e^{i\pi} = -1$, в котором заняты пять замечательных символов $0, 1, e, \pi, i$ (так как $-1 = 0 - 1$). Эйлер же (1771) предложил использовать вместо $\sqrt{-1}$ современное обозначение i.

Первые мемуары (т. е. статьи) о геометрическом представлении комплексных чисел принадлежат К. Весселю (1797) и Ж. Аргану (1806). Второй из них ввёл в употребление термин *модуль*; современное обозначение $|z|$ предложил позднее К. Вейерштрасс (K. Weirstrass). Название *комплексное число* впервые встречается у К. Гаусса (K. Gauss, 1831).

Чисто арифметическая теория комплексных чисел как пар действительных чисел была построена У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1837). Ему же (1843) принадлежит обобщение комплексных чисел — так называемые *кватернионы Гамильтона* $q = a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, в умножении которых используются равенства

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik,$$

так что $ijk = jki = kij = -1$. Совокупность кватернионов образует некоммутативное *тело*, содержащее $\mathbb{C}$ в качестве подполя. Позднее А. Кэли (A. Cayley), отбросив требование ассоциативности умножения, построил обобщение кватернионов — *октавы Кэли,* наборы, состоящие из восьми компонент. К концу 19 в. появилось много работ, посвящённых более широким системам чисел, названных *гиперкомплексными*; теперь такие системы называют *алгебрами конечного ранга.*

Дальнейшее развитие представлений о комплексных числах проходило в рамках *теории функций комплексного переменного (ТФКП)* — своеобразной и очень интересной области анализа. Проблематику этой науки изложил Гаусс в своём письме к Бесселю (1811). Основоположником ТФКП является О. Коши (A. Cauchy), а подлинными творцами — Б. Риман (B. Riemann) и К. Вейерштрасс.

Кроме алгебры, теории чисел и ТФКП, комплексные числа играют существенную роль в длинном перечне разделов математики. Лишь для примера отметим здесь анализ и его приложения (дифференциальные и интегральные уравнения, спектральная теория, преобразование Фурье, аппроксимация в комплексной области, интерполяция линейных операторов и др.) и математическое моделирование (задачи математической физики, цифровая обработка сигналов и др.).

Систематическое изложение теории функций комплексного переменного осуществляется в рамках отдельного курса или соответствующего раздела курса анализа. Не претендуя на полноту, мы дадим лишь некоторое понятие о проблематике этой науки и её исторических корнях. Разумеется, этот пункт не является обязательным для читателя.

В широком смысле слова ТФКП изучает функции одного или многих комплексных переменных. В узком смысле предметом исследования являются лишь так называемые *аналитические функции* комплексных переменных. Всюду далее мы ограничимся последней темой, рассматривая, кроме того, комплекснозначные функции одного комплексного переменного.

Как самостоятельная дисциплина ТФКП оформилась примерно к середине 19 в. Основополагающими здесь являются работы Огюстена Коши (1789–1857), Карла Вейерштрасса (1815–1897) и Бернхарда Римана (1826–1866). Эти математики подходили к развитию данной науки с различных позиций. Классический курс ТФКП как раз и объединяет (в разной степени подробности) черты этих подходов и рассматривает взаимосвязь соответствующих понятий и свойств.

Исходным пунктом является введение *топологии* на так называемой *расширенной комплексной плоскости,* то есть комплексной плоскости $\mathbb{C}$, пополненной идеальной бесконечно удалённой точкой $z = \infty$. Топология задаётся с помощью системы окрестностей, то есть множеств вида

$$C(\delta; z_0) := \{z : |z - z_0| < \delta\}, \quad C(\delta; \infty) := \{z : |z| > \delta\}$$

(здесь $z_0 \in \mathbb{C}, \delta > 0$). На этой основе вводятся понятия открытых и замкнутых множеств, внутренних и граничных точек, замыкания и компактности. Под *областью* E понимается открытое связное множество (т. е. множество $E \subset \mathbb{C}$, все точки которого входят в E с некоторой окрестностью и любые две точки которого можно соединить ломаной, целиком лежащей в E).

Даётся определение сходимости числовых последовательностей и рядов с комплексными элементами. Далее описываются такие свойства функций комплексного переменного, как непрерывность, равномерная непрерывность, и свойства сходимости функциональных последовательностей и рядов. Особую роль, как и в классическом анализе, играют *степенные ряды,* частичные суммы которых являются алгебраическими многочленами. С помощью степенных рядов вводятся некоторые элементарные функции, например

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Основное определение — аналитической функции — в рамках каждого из подходов формулируется по-своему.

Коши в своём построении теории аналитических функций исходил из понятия дифференцируемости. Функцию f называют дифференцируемой, или моногенной в точке z, если в этой точке она имеет производную $f'(z)$.

Для $z = x + iy$ положим $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Действительная и мнимая части дифференцируемой функции с необходимостью удовлетворяют условиям Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Наоборот, выполнение условий Коши – Римана в точке z при условии дифференцируемости функций u и v (или, как ещё говорят, существования их полных дифференциалов) является достаточным для дифференцируемости f в этой точке. Функция называется *аналитической в области* E, если она дифференцируема всюду в E.

Коши развил теорию интегрирования непрерывных функций. В частности, он показал (1825), что интеграл от аналитической функции с комплексными пределами не зависит от выбора пути интегрирования. Коши доказал эту теорему при дополнительном предположении непрерывности $f'(z)$; это ограничение впоследствии снял Э. Гурса (1884). В комплексной ситуации интеграл берётся по некоторой непрерывной кривой — так называемой *кусочно-гладкой кривой Жордана.* Таким образом, для произвольной аналитической в односвязной области E функции $f(z)$ и любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана $\Gamma \subset E$

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Отсюда получается, что при некоторых условиях

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)dt}{\xi - z} = f(z).$$

Здесь Γ — граница E и $z \in E$. Если же z принадлежит дополнению к замыканию E, то интеграл в левой части равен 0. Свойства этого интеграла, называемого *интегралом типа Коши,* приводят к следующему важному результату, не имеющему аналога в действительном анализе: *аналитическая в области E функция $f(z)$ в каждой точке этой области имеет производную любого порядка.*

Таким образом, в комплексном анализе однократная дифференцируемость влечёт бесконечную дифференцируемость.

По Вейерштрассу, функция $f(z)$ является аналитической в области D, если в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ она разлагается в степенной ряд

$$w = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Для определения аналитических (в этом смысле) функций достаточно даже, чтобы сходящийся степенной ряд был задан в окрестности одной-единственной точки z_0, ибо значения f в других точках z_1 и соответствующие ряды могут быть определены в процессе так называемого *аналитического продолжения* вдоль различных путей, соединяющих z_0 и z_1. В этом процессе могут встретиться *особые точки,* аналитическое продолжение в которые невозможно. Это ведёт к тому, что продолжение f вдоль различных путей Γ_1 и Γ_2 от z_0 к z_1 может привести к различным значениям $f(z_1)$.

Таким образом, полная аналитическая функция $w = f(z)$, полученная аналитическими продолжениями степенного ряда по всевозможным путям, может оказаться многозначной. Таковы, например, функции $w = \sqrt[n]{z}$ и $w = \operatorname{Ln} z$. Способ превращения многозначной аналитической функции в однозначную состоит в том, что её следует рассматривать не как функцию точки $z \in \mathbb{C}$, а как функцию точки *римановой поверхности*, состоящей из нескольких листов, накрывающих комплексную плоскость и соединённых некоторым специальным образом между собой. Так, риманова поверхность для функции $w = \sqrt[n]{z}$ состоит из n листов, а для $w = \operatorname{Ln} z$ даже является бесконечнолистной.

Наконец, для Римана главным был геометрический подход, состоящий в анализе свойств отображений, осуществляемых аналитическими функциями. Если f является аналитической в смысле Коши (в частности, удовлетворяет условиям Коши – Римана), то при некоторых условиях f осуществляет так называемое *конформное отображение.* При таком отображении имеет место постоянство углов и постоянство искажения масштаба по всем направлениям, исходящим из точки z_0.

Риманом установлены основные принципы теории конформных отображений. Им, в частности, доказана следующая знаменитая теорема, носящая его имя. *Для каждой односвязной однолистной области, граница которой состоит более чем из одной точки, существует единственная однолистная аналитическая функция, осуществляющая конформное отображение этой области на внутренность единичного круга.*

Итак, существенной и исторически обусловленной частью ТФКП является сравнение следующих условий и связанных с ними свойств функции:

(1°) f является дифференцируемой в E и, следовательно, имеет в E производную любого порядка;

(2°) f разлагается в окрестностях точек E в степенные ряды;

(3°) f осуществляет конформное отображение.

К тематике ТФКП относятся и другие важные вопросы (изучение свойств конкретных функций, ряды Лорана, изолированные особые точки и их классификация, вычеты и их приложения и др.). Многие из этих вопросов представлены в настоящем пособии.

Глава 1. Основные понятия ТФКП. Упражнения

§ 1. Комплексные числа и действия с ними

Для комплексного числа в алгебраической форме $z = x+iy$ его действительная часть, мнимая часть, модуль и сопряжённое число определяются равенствами

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y, \quad r = |z| := \sqrt{x^2+y^2}, \quad \overline{z} := x - iy.$$

Равенство $z_1 = z_2$ по определению означает, что одновременно выполняются соотношения $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Основные операции с комплексными числами — их сложение и умножение:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) := (x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) := (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).$$

В приложениях часто используются равенства

$$z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z, \quad z-\overline{z} = 2i\operatorname{Im} z, \quad z\overline{z} = |z|^2,$$

$$\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},$$

неравенство треугольника $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, а также вытекающее из него соотношение $\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1-z_2|$.

Для $z \ne 0$ любое число φ, удовлетворяющее условиям $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, называется аргументом z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Значение φ из полуинтервала $[0, 2\pi)$ или из полуинтервала $(-\pi, \pi]$ называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определён.

Тригонометрическая форма комплексного числа даётся равенством $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Действия в тригонометрической форме имеют следующие свойства:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big),$$

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1.1}$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big) \quad (r_2 \ne 0). \tag{1.2}$$

Здесь $n \in \mathrm{N}$. Если $w^n = z$, полагают $\sqrt[n]{z} = w$. Существует ровно n различных значений этого корня. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то значения $\sqrt[n]{z}$ имеют вид:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.3}$$

Полагая $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, переходим от тригонометрической формы комплексного числа к показательной форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$.

В этом и следующем пунктах считается $\arg z \in [0, 2\pi)$.

Пример 1.1.

$$\frac{-1+2i}{2+5i} = \frac{(-1+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{8+9i}{29} = \frac{8}{29} + \frac{9}{29}\,i.$$

Пример 1.2. Решим уравнение $\operatorname{Im} z + |\overline{z} - 2z| \cdot i = 2i$.

Пусть $z = x + iy$. Тогда $\overline{z} = x - iy$, $\operatorname{Im} z = y$,

$$|\overline{z} - 2z| = |x - iy - 2x - 2iy| = |-x - 3iy| =$$

$$= \sqrt{(-x)^2 + (-3y)^2} = \sqrt{x^2 + 9y^2}.$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$y + \sqrt{x^2 + 9y^2} \cdot i = 2i.$$

Сравнение действительной и мнимой частей даёт $y = 0$, $\quad \sqrt{x^2 + 9y^2} = 2$. Это означает, что $x = \pm 2$. Итак, $z = \pm 2$.

Пример 1.3. Пусть $z = 1$. Так как $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = 0$, то $|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$, $\arg z = 0$. Поэтому $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = e^{i\cdot 0}$. Аналогично

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{i\pi},$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\cdot 7\pi/4},$$

$$3 + 4i = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 5e^{i\alpha}.$$

Здесь α — угол первой четверти, для которого $\cos\alpha = 3/5$.

Пример 1.4. Вычислим $(1+i)^{25}$. Для этого переведём $z = 1 + i$ в тригонометрическую форму. Так как $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \pi/4$, то

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Применение (1.1) с $n = 25$ даёт:

$$z^{25} = (\sqrt{2})^{25}\left(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4}\right) = 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{12}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{12}(1+i).$$

Пример 1.5. Пусть требуется найти все значения корня

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}\,.$$

Сначала переведём числитель и знаменатель в тригонометрическую форму, затем выполним деление по формуле (1.2) и, наконец, применим (1.3). Такой порядок действий является самым экономичным.

$$z_1 = 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right), \quad z_2 = \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\,(\cos 7\pi/4 + i\sin 7\pi/4)}{2\,(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Применение формулы (1.3) с $n=6$ даёт:

$$w_k = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19\pi/12+2k\pi}{6}+i\sin\frac{19\pi/12+2k\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19\pi+24k\pi}{72}+i\sin\frac{19\pi+24k\pi}{72}\right).$$

Все значения w_k корня $\sqrt[6]{z}$ получаются, если взять последовательно $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

У п р а ж н е н и я

1) Вычислить, используя алгебраическую форму комплексного числа.

1.1. $\left|(2+i)(3-i)^2+(2+3i)(3+4i)\right|$.

1.2. $\left|(2+i)^2(3+7i)-(1+2i)(5+3i)\right|$.

1.3. $\left|(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)\right|^2$.

1.4. $\operatorname{Re}\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$. **1.5**. $\operatorname{Im}\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$.

1.6. $\left|\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}\right|$. **1.7.** $\operatorname{Re}\dfrac{2+15i}{(1+i)^3}$.

1.8. $\operatorname{Im}\dfrac{(2-5i)(6+7i)}{(4-i)(5+i)}$.

1.9. $\operatorname{Re}(1+2i)-\operatorname{Im}(1+2i)^2+\operatorname{Re}(1+2i)^3$.

1.10. $\operatorname{Re}\dfrac{1-i}{2-i}-\operatorname{Im}\dfrac{2+i}{1+3i}$.

2) Решить уравнение относительно неизвестного $z \in \mathbb{C}$.

1.11. $iz-3\overline{z}=-5+7i$. **1.12.** $(iz-1)\overline{z}=-3+15i$.

1.13. $\dfrac{z+2i}{\overline{z}-i}=1+2i$. **1.14.** $\operatorname{Re}z-\dfrac{z}{|z|}=2$.

1.15. $2z+|z+\overline{z}|\cdot i=4+2i$. **1.16.** $2\operatorname{Re}z-3|z-\overline{z}|\cdot i=2-9i$.

1.17. $iz^2-3\overline{z}=2i$. **1.18.** $|z-8i|^2+2\overline{z}=3-12i$.

1.19. $z^2-\overline{z}=2i\operatorname{Im}z$. **1.20.** $z^2+\overline{z}=2\operatorname{Re}\dfrac{1+i}{1-i}$.

3) Найти все значения квадратного корня, проводя вычисления в алгебраической форме.

1.21. $\sqrt{2i}$. **1.22.** $\sqrt{-8i}$.

1.23. $\sqrt{-15+8i}$. **1.24.** $\sqrt{-11+60i}$.

1.25. $\sqrt{-8+6i}$. **1.26.** $\sqrt{-8-6i}$.

1.27. $\sqrt{8-6i}$. **1.28.** $\sqrt{8+6i}$.

1.29. $\sqrt{2-3i}$. **1.30.** $\sqrt{-3-4i}$.

4) Решить квадратное уравнение с неизвестным $z \in \mathbb{C}$.

1.31. $z^2-(2+i)z-1+7i=0$. **1.32.** $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$.

1.33. $iz^2+1=0$. **1.34.** $z^2-(1+i)z+6+3i=0$.

1.35. $z^2-5z+4+10i=0$. **1.36.** $z^2+(-7+2i)z+13-i=0$.

1.37. $z^2+(-1+4i)z-4i=0$. **1.38.** $z^2+(-1+3i)z-2-i=0$.

1.39. $z^2+(-5+i)z-5i=0$. **1.40.** $z^2+(-1+6i)z-6i=0$.

5) Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах.

1.41. $4+4i$. **1.42**. $2\sqrt{3}+2i$.

1.43. 5 . **1.44**. $4i$.

1.45. $-2+2i$. **1.46**. $-1+\sqrt{3}i$.

1.47. $-2i$. **1.48**. $4+4i$.

1.49. $1-\sqrt{3}i$. **1.50**. $\sqrt{3}+i$.

6) Доказать неравенство, используя свойства модуля комплексного числа.

1.51. $\left|(1+i)z-iz^2\right|<3,\quad$ если $\quad |z|<1$.

1.52. $\left|z^2-\overline{z}^{\,2}+i\right|<3,\quad$ если $\quad |z|<1$.

1.53. $1\le\left|z^2+5\right|\le 9,\quad$ если $\quad |z|\le 2$.

1.54. $\left|(3+2i)z+2\overline{z}\right|<2\,,\quad$ если $\quad |z|<\dfrac{1}{3}$.

1.55. $\left|(5-12i)z^3-\overline{z}\right|>12,\quad$ если $\quad |z|>1$.

1.56. $\left|z^3-5i\right|<13,\quad$ если $\quad |z|<2$.

1.57. $\left|\dfrac{i}{z-6+8i}\right|\ge\dfrac{1}{12}\,,\quad$ если $\quad |z|<2$.

1.58. $\left|\dfrac{z-2i}{z+i}\right|\le 8,\quad$ если $\quad \dfrac{3}{2}\le|z|\le 2$.

1.59 $\left|(3-4i)\overline{z}-z^2\right|>6,\quad$ если $\quad |z|>6$.

1.60. $\left|\dfrac{1-3z^2\overline{z}}{2+i}\right|<12,\quad$ если $\quad |z|\le 2$.

7) Вычислить, применяя тригонометрическую форму комплексного числа.

1.61. $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{30}$. **1.62**. $\left(\dfrac{2+2i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10}$.

1.63. $\left(\dfrac{1-i}{i}\right)^{15}$. **1.64**. $\left(\dfrac{-2i}{-3+3i}\right)^{6}$.

1.65. $(1-i)^{30}$. **1.66**. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{60}$.

1.67. $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}$. **1.68**. $(1+\sqrt{3}i)^{150}$.

1.69. $(\sqrt{3}+i)^{30}$. **1.70**. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{20}$.

8) Найти все значения корня, применяя тригонометрическую форму комплексного числа.

1.71. $\sqrt[6]{\dfrac{(1+i)^3}{\sqrt{3}+i}}$. **1.72**. $\sqrt[10]{\dfrac{-i^5}{(-1+i)^3}}$.

1.73. $\sqrt[5]{\dfrac{i^3}{2+2i}}$. **1.74**. $\sqrt[8]{\dfrac{(1-i)^{10}}{2i}}$.

1.75. $\sqrt[6]{\dfrac{(1-i)^2}{2\sqrt{3}-2i}}$. **1.76**. $\sqrt[4]{\dfrac{16\sqrt{3}-16i}{(1+i)^{10}}}$.

1.77. $\sqrt[3]{\dfrac{(1-i)^{10}}{8+8\sqrt{3}i}}$. **1.78**. $\sqrt[6]{\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{1+\sqrt{3}i}}$.

1.79. $\sqrt[5]{\dfrac{-2i}{(\sqrt{3}-i)^7}}$. **1.80**. $\sqrt[7]{\dfrac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}}$.

9) Дополнительные задачи.

1.81. Пусть $n \geq 2$, $w^n = 1$. Чему равна сумма $1 + w + \ldots + w^{n-1}$?

1.82. Доказать, что если $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$ и $n \in \mathrm{N}$, то $z^n + z^{-n} = 2\cos n\alpha$.

1.83. Доказать, что совокупность M матриц второго порядка вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

с операциями сложения и умножения матриц образует поле, изоморфное полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

§ 2. Изображение комплексных чисел

Пусть
$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

На плоскости с декартовой системой координат число z изображается точкой Q с координатами (x, y). Соответствие точек плоскости и комплексных чисел, осуществляемое по правилу $Q(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$, является взаимно-однозначным. Поэтому декартову плоскость часто называют комплексной плоскостью, отождествляя её точки с числами $z \in \mathbb{C}$. Оси координат, по которым откладываются величины $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$, называются соответственно действительной и мнимой осями. Их уравнения $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z = 0$.

Числа $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$ представляют собой полярные координаты точки $Q(x, y)$. Мы считаем, что полярная система координат обычным образом ассоциирована с декартовой: полюс совпадает с началом декартовой системы — точкой O, а направление полярного луча совпадает с направлением оси абсцисс. Из определения модуля и аргумента следует, что r — длина вектора $\overline{OQ}$, а φ — угол, образованный вектором $\overline{OQ}$ и направлением действительной оси.

Множество комплексных чисел z, удовлетворяющих соотношению $a \cdot \operatorname{Re} z + b \cdot \operatorname{Im} z + c = 0$ или соотношению $a \cdot \operatorname{Re} z + b \cdot \operatorname{Im} z + c \geq 0$ (a, b, c — действительные, $a^2 + b^2 \neq 0$), изображается соответственно прямой с нормальным вектором $\vec{n} = \{a, b\}$ или полуплоскостью (с границей), в которую направлен вектор $\vec{n}$.

Величина $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками z_1, z_2, так как в стандартных обозначениях
$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$
Отсюда следует, что при фиксированных $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \geq 0$ множество
$$G = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - z_0| \leq R\}$$
изображается кругом (с границей) радиуса R с центром в z_0. Граница Γ этого круга (окружность) задаётся равенством $|z - z_0| = R$, внешность круга (без границы) — неравенством $|z - z_0| > R$. Если $R = 0$, то $G = \Gamma = \{z_0\}$. В связи с этим
$$K = \{z \in \mathbb{C} \;:\; r \leq |z - z_0| \leq R\}, \quad 0 < r < R,$$
представляет собой кольцо, ограниченное окружностями радиусов r и R с центрами в z_0 (с границей). Множество
$$H = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \arg z = s\}, \qquad 0 \leq s < 2\pi,$$

есть луч (без начала координат), образующий с действительной осью угол s,

$$S = \{z \in \mathbb{C} \ : s_1 \le \arg z \le s_2\}, \qquad 0 \le s_1 < s_2 \le 2\pi,$$

— внутренность углового сектора, образованного лучами $\arg z = s_1$, $\arg z_2 = s_2$ (с границей за исключением точки $z = 0$). Уравнения

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2q, \qquad 2c = |z_1 - z_2| < 2q,$$

$$\Big||z - z_1| - |z - z_2|\Big| = 2q, \qquad 2c = |z_1 - z_2| > 2q > 0$$

при фиксированных z_1, z_2 задают на комплексной плоскости соответственно эллипс и гиперболу с фокусами в точках z_1, z_2 и полуосью q.

У п р а ж н е н и я

1) Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих указанной системе соотношений.

2.1. $1 \le |z + 3 - 4i| \le 2, \quad 0 < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$.

2.2. $2\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z \ge 0, \quad |z - 1| \le 2$.

2.3. $1 \le |z + 4i| \le 3, \quad \mathrm{Im}\, z > 4$.

2.4. $|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \le 1, \quad |z - i| \le 1$.

2.5. $-4 \le \mathrm{Re}\, z \le -3, \quad |z + 5 - 2i| \le 3$.

2.6. $\arg z = \dfrac{\pi}{2}, \quad |\overline{z} + i| \le 1$.

2.7. $|z - 2 + i| \ge |z + 1 - 5i|$.

2.8. $|z| > 2 + \mathrm{Im}\, z$.

2.9. $|z| \le \mathrm{Re}\, z$.

2.10. $4 \le |z - 1| + |z + 1| \le 8$.

2) Изобразить линию, задаваемую данным уравнением.

2.11. $|z + 2| - |z - 2| = 3$.

2.12. $|z - i| - |z + i| = 2$.

2.13. $|z - 2| = \mathrm{Re}\, z$. **2.14**. $\mathrm{Im}\, z^2 = 2$.

2.15. $\mathrm{Re}\, \overline{z}^{\,2} = 1$. **2.16**. $|z - 2| = \mathrm{Re}\, z$.

$$\textbf{2.17.}\quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\,. \qquad \textbf{2.18.}\quad z^2+\overline{z}^{\,2}=1\,.$$

$$\textbf{2.19.}\quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=1\,. \qquad \textbf{2.20.}\quad 2z\overline{z}+(2+i)z+(2-i)\overline{z}=2\,.$$

3) Задать с помощью соотношений на $z \in \mathbb{C}$ указанное множество.

2.21. Внешность круга с центром $z_0 = -1 + 2i$ и радиусом $r = 5$ с границей.

2.22. Правый полукруг без границы из круга с центром $z_0 = 2 - i$ и радиусом $r = 2$.

2.23. Концентрическое кольцо с центром $z_0 = -i$, внутренним радиусом $r = 1$ и внешним радиусом $r = 4$ без границы.

2.24. Внутренность эллипса с фокусами $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 - 3i$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 1/2$.

2.25. Внешность эллипса с фокусами $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = 8 - 2i$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 1/3$.

4) Дополнительные задачи.

2.26. Изобразить на комплексной плоскости множество точек

$$z=\frac{1+it}{1-it}\,,\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

2.27. Применяя геометрический подход, доказать для z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ неравенство

$$|z_1-z_2|\le\Big||z_1|-|z_2|\Big|+\min\{|z_1|,|z_2|\}\cdot|\arg z_1-\arg z_2|\,.$$

2.28. Точка z движется по линии $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$ в направлении против часовой стрелки. Определить траекторию и направление движения точки $w = 1/z$.

§ 3. Функции $e^z, \sin z, \cos z,\ \operatorname{ch} z,\ \operatorname{sh} z,\ \sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z, \ln z$

Однозначные функции комплексного переменного $e^z, \sin z$ и $\cos z$ могут быть первоначально определены с помощью следующих степенных рядов, сходящихся для всех $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\,, \tag{3.1}$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,. \tag{3.2}$$

Из (3.1) – (3.2) получаются равенства:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,,$$

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) может быть принято за другое, эквивалентное определение экспоненты. Эти функции являются периодическими, а именно

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2k\pi) = \sin z, \quad e^{z+2k\pi i} = e^z; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В отличие от действительного случая функции $|\cos z|$ и $|\sin z|$ не являются ограниченными на $\mathbb{C}$.

Гиперболические функции вводятся с помощью соотношений

$$\operatorname{ch} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,, \quad \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,,$$

$$\operatorname{th} z := \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\,, \quad \operatorname{cth} z := \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\,.$$

При всех z имеют место равенства

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ n-значная функция $w = \sqrt[n]{z}$ задаётся с помощью формулы

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Упражнения на вычисление значений $\sqrt[n]{z}$ даны в пункте 1.

Бесконечнозначная логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$, вводится следующим образом:

$$\operatorname{Ln} z := \ln|z| + i \arg z + i \cdot 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выражение, не содержащее слагаемого $i \cdot 2k\pi$, называется главным значением логарифма и обозначается $\ln z$.

Для произвольных комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β полагают

$$\alpha^\beta := e^{\beta \operatorname{Ln} \alpha}.$$

Пример 3.1. Найдём действительную и мнимую части функции $\sin z$ и убедимся, что $|\sin z| \to \infty$ при $z \to \infty$ вдоль некоторых путей.

Применяя формулы сложения и связи с гиперболическими функциями, запишем: $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$. Поэтому

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1-\sin^2 x) \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

Мы использовали равенство $\operatorname{ch}^2 w - \operatorname{sh}^2 w = 1$, $w \in \mathbb{C}$. Если $x = \mathrm{const}$, а $y \to \pm\infty$, то $|\sin z| \to \infty$.

Пример 3.2. Вычислим $\operatorname{Ln}(1+i)$, $\ln(1+i)$, 2^{1+i}.

Так как

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0),$$

то

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i \cdot \frac{\pi}{4} + i \cdot 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$2^{1+i} = e^{(1+i)\operatorname{Ln} 2} = e^{(1+i)(\ln 2 + i\cdot 0 + i \cdot 2k\pi)} = e^{\ln 2 - 2k\pi + i(\ln 2 + 2k\pi)} =$$

$$= e^{\ln 2 - 2k\pi + i \ln 2} = e^{\ln 2 + 2m\pi}\Big(\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)\Big) =$$

$$= 2e^{2m\pi}\Big(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)\Big), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Упражнения

1) Вычислить выражение.

3.1. $\operatorname{Re} e^{2+4i}$. **3.2**. $|\sin(3-4i)|$.

3.3. $\operatorname{Im} \cos(6+2i)$. **3.4**. $|\cos(1+10i)|$.

3.5. $\operatorname{Re} \operatorname{ch}(1-i)$. **3.6**. $|\sin(4+7i)|$.

3.7. $\operatorname{Im} \operatorname{sh}(1+2i)$. **3.8**. $|\cos(3+20i)|$.

3.9. $\operatorname{Re} \operatorname{ch}(2-i)$. **3.10**. $\operatorname{Im} e^{2-5i}$.

2) Найти действительную, мнимую части и модуль функции $f(z)$.

3.11. $f(z) = e^z$. **3.12**. $f(z) = \sin z$.

3.13. $f(z) = \cos z$. **3.14**. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

3.15. $f(z) = \operatorname{ch} z$.

3) Выяснить, в каких точках функция $f(z)$ принимает действительные значения, а в каких — чисто мнимые значения.

3.16. $f(z) = \cos z$. **3.17**. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

3.18. $f(z) = \operatorname{ch} z$. **3.19**. $f(z) = e^z$.

3.20. $f(z) = \sin z$.

4) Вычислить значения логарифмов.

3.21. $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$, $\ln\left(\sqrt{3}+i\right)$.

3.22. $\operatorname{Ln}(1+i)$, $\ln(1+i)$.

3.23. $\operatorname{Ln}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$, $\ln\left(-1+\sqrt{3}i\right)$.

3.24. $\operatorname{Ln}(-3+3i)$, $\ln(-3+3i)$.

3.25. $\operatorname{Ln}(-i)$, $\ln(-i)$.

3.26. $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)$, $\ln\left(\sqrt{3}-i\right)$.

3.27. $\operatorname{Ln}(-1-i)$, $\ln(-1-i)$.

3.28. $\operatorname{Ln}(4i)$, $\ln(4i)$.

3.29. $\operatorname{Ln}\left(1-\sqrt{3}i\right)$, $\ln\left(1-\sqrt{3}i\right)$.

3.30. $\operatorname{Ln} 10$, $\ln 10$.

5) Найти все значения указанного выражения.

3.31. $(1+i)^i$. **3.32**. $(-2)^{\sqrt{5}}$.

3.33. $(-1+i)^{-1+i}$. **3.34**. 3^i .

3.35. $\left(\sqrt{3}+i\right)^{-i}$. **3.36**. $(-2-2i)^{-3i}$.

3.37. i^{-1-i} . **3.38**. $(-3+3i)^{\sqrt{7}}$.

3.39. $(2i)^{2i}$. **3.40**. $(-4)^{-4}$.

6) Дополнительные задачи.

3.41. С помощью свойства $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ доказать тождество

$$e^{i(z_1+z_2)} \pm e^{-i(z_1+z_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} \pm e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} \mp e^{-iz_2}\right)\right],$$

из которого затем получить равенства

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

3.42. Установить с помощью равенств для $\cos(z_1 + z_2)$ и $\sin(z_1 + z_2)$ аналогичные соотношения для $\operatorname{ch}(z_1+z_2)$ и $\operatorname{sh}(z_1+z_2)$. Использовать связь $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$, $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$.

3.43. Найти все нули каждой из функций e^z, $\cos z$, $\sin z$.

§ 4. Дробно-линейная функция

Невырожденной дробно-линейной функцией называется функция вида

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

При отмеченном ограничении из $z_1 \neq z_2$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Важнейшим свойством дробно-линейных отображений является так называемое круговое свойство. Любое такое отображение переводит окружность или прямую в окружность или прямую (или, проще, окружность в окружность; при таком подходе прямая считается окружностью бесконечного радиуса). Доказательство этого свойства приводится в § 12 главы 2.

Невырожденная дробно-линейная функция содержит три комплексных параметра, представляющих собой отношения трёх из четырёх коэффициентов к четвёртому, отличному от 0. Эти параметры однозначно определяются из требования, чтобы три заданные точки z_1, z_2, z_3 переходили в заданные w_1, w_2, w_3. Какие-то из этих чисел могут быть равны ∞. Зная эти шесть точек, функцию $w = f(z)$ можно найти из равенства

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \tag{4.1}$$

Величина, стоящая в правой части, называется ангармоническим отношением чисел z, z_3, z_1, z_2. Равенство (4.1), таким образом, означает, что f сохраняет ангармоническое отношение. Разрешая (4.1) относительно w, получим искомую дробно-линейную функцию. Если какая-то из точек z_j или w_j равна ∞, то в (4.1) следует заменить на 1 каждую разность, содержащую эту точку.

Найденное дробно-линейное отображение переводит точки z_j и проходящую через них окружность Γ_z в точки w_j и проходящую через них окружность Γ_w. Тройки точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 определяют направления обхода на Γ_z и Γ_w, причём области, остающиеся при этом обходе слева (справа), при отображении $w = f(z)$ соответствуют друг другу.

Пример 4.1. Найдём дробно-линейную функцию $w = f(z)$, переводящую точки $z_1 = 0$, $z_2 = -i$, $z_3 = 2i$ в точки $w_1 = -1$, $w_2 = 0$ и $w_3 = 3$. Равенство (4.1) в данном случае имеет вид

$$\frac{w+1}{w} : \frac{3+1}{3} = \frac{z}{z+i} : \frac{2i}{3i}\,,$$

что после несложных вычислений даёт $w = (z+i)/(z-i)$.

Пример 4.2. Найдём функцию, отображающую единичный круг $|z| \leq 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \geq 0$.

Ясно, что ответ можно искать в классе дробно-линейных функций. Внутренность единичной окружности остаётся слева при движении в направлении от $z_1 = 1$ через $z_2 = i$ к $z_3 = -1$. Верхняя полуплоскость остаётся слева от прямой $\operatorname{Im} z = 0$ при прохождении этой прямой в направленни от $w_1 = 0$ через $w_2 = 1$ к $w_3 = \infty$. Поэтому искомым будет дробно-линейное отображение $w = f(z)$ такое, что $w_j = f(z_j)$. Так как $w_3 = \infty$, то равенство (4.1) сводится к пропорции

$$\frac{w}{w-1} : \frac{1}{1} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{2}{1+i}\,.$$

После вычислений получаем ответ: $w = (-iz+i)/(z+1)$.

Пример 4.3. Ответим на вопрос: во что переходит полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 0$ при отображении $w = (iz+1)/(z-1)$?

Выберем на границе полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ три точки $z_1 = i$, $z_2 = 0$, $z_3 = -i$, при обходе которых область остаётся слева. Вычислим их образы: $w_1 = 0$, $w_2 = -1$, $w_3 = -1+i$. Изобразив w_j на комплексной плоскости w, заметим, что w_j принадлежат окружности с центром в точке $-1/2 + i/2$ радиуса $\sqrt{2}/2$. При движении по этой окружности от w_1 через w_2 к w_3 слева от линии остаётся внешность круга. Поэтому наше отображение переводит полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 0$ во множество

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Упражнения

1) Найти дробно-линейное отображение $w = f(z)$, которое переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 соответственно.

4.1. $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1+i; \qquad w_1 = 0, w_2 = 2i, w_3 = 1-i$.

4.2. $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 1-i; \qquad w_1 = 1-i, w_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i, w_3 = 2-i$.

4.3. $z_1 = 1, z_2 = 1+i, z_3 = 2+i; \qquad w_1 = -1+i, w_2 = \infty, w_3 = 2+2i$.

4.4. $z_1 = 1-i, z_2 = 0, z_3 = \infty; \qquad w_1 = 1+i, w_2 = \infty, w_3 = 0$.

4.5. $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 3+i; \qquad w_1 = -4, w_2 = -4+2i, w_3 = -6+6i$.

4.6. $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1+i; \qquad w_1 = i, w_2 = \infty, w_3 = 1$.

4.7. $z_1 = -1, z_2 = \infty, z_3 = i; \qquad w_1 = i, w_2 = 1, w_3 = 1+i$.

4.8. $z_1 = -1, z_2 = \infty, z_3 = i; \qquad w_1 = \infty, w_2 = i, w_3 = 1$.

4.9. $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 0; \qquad w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$.

4.10. $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1; \qquad w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$.

2) Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, отображающую множество G на множество H.

4.11. G — круг $|z| \le 1$, H — полуплоскость $\operatorname{Im} w \ge 0$.

4.12. G — круг $|z-i| \le 1$, H — полуплоскость $\operatorname{Re} w \le 0$.

4.13. G — круг $|z-1+i| \le 1$, H — полуплоскость $\operatorname{Im} w \ge 1$.

4.14. G — круг $|z| \le 1$, H — круг $|w-i| \le 1$.

4.15. G — полуплоскость $\operatorname{Re} z \ge 1$, H — множество $|w| \ge 1$.

4.16. G — полуплоскость $\operatorname{Im} z \ge -1$, H — круг $|w-i| \le 1$.

4.17. G — полуплоскость $\operatorname{Re} z \ge 0$, H — полуплоскость $\operatorname{Im} w \le -1$.

4.18. G — полуплоскость $\operatorname{Re} z \le -1$, H — полуплоскость $\operatorname{Re} w \ge 1$.

4.19. G — множество $|z-1| \ge 1$, H — круг $|w-i| \le 1$.

4.20. G — круг $|z-1| \le 1$, H — полуплоскость $\operatorname{Im} z \le 2$.

3) Выяснить, в какое множество переходит множество M при отображении $w = f(z)$.

4.21. M — квадрант $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$, $w = (z-i)/(z+i)$.

4.22. M — полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$, $w = (2z-i)/(iz+2)$.

4.23. M — полоса $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $w = (z-1)/(z-2)$.

4.24. M — кольцо $1 < |z| < 2$, $w = z/(z-1)$.

4.25. M — полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 1$, $\quad w = (z-1)/z$.

4) Дополнительные задачи.

4.26. Доказать, что совокупность невырожденных дробно-линейных функций относительно операции суперпозиции образует группу.

4.27. Доказать, что каждое из отображений $w = az$, $w = z+b$ $(a, b \in \mathbb{C})$, $w = 1/z$ обладает круговым свойством. В случае затруднений см. § 12 главы 2.

4.28. Доказать, что невырожденное дробно-линейное отображение редуцируется к отображениям предыдущей задачи и тем самым обладает круговым свойством.

4.29. Установить круговое свойство невырожденного дробно-линейного отображения иным способом, нежели тот, который был отмечен в двух предыдущих задачах. Использовать для этого следующий факт. Любая окружность или прямая на комплексной плоскости может быть задана *уравнением Аполлония*

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = k, \qquad k > 0, \quad p, q \in \mathbb{C} \text{ — фиксированы},$$

и любое такое уравнение задаёт окружность или прямую.

§ 5. Дифференцирование функций комплексного переменного

Пусть комплекснозначная функция $f(z)$ комплексного переменного определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0 тогда и только тогда, когда при любом способе стремления $z \to z_0$ существует конечный предел отношения $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. В этом случае полагают

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\ .$$

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Если $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ и выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{5.1}$$

Выполнение условий (5.1) при дополнительном требовании дифференцируемости функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0,y_0) является достаточным для дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0. Дифференцируемость u и v означает возможность представления приращений этих функций в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + \eta_1, \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\Delta y + \eta_2, \tag{5.2}$$

где $\eta_{1,2} = o(|\Delta z|)$, $|\Delta z| := \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Громоздкие и трудно проверяемые непосредственно условия (5.2) во всяком случае выполнены, если частные производные функций u и v непрерывны в точке z_0.

Функция $f(z)$, дифференцируемая во всех точках области E, называется аналитической (или голоморфной) в этой области. Термин "аналитическая в точке" иногда применяется в смысле "аналитическая в некоторой окрестности точки". Для аналитической в области E функции $f(z)$ во всех точках E существуют частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ и выполняются условия Коши – Римана (5.1). Если u и v дифференцируемы в области E, то выполнение условий (5.1) достаточно для аналитичности $f(z)$ в E. Отметим также, что в предположении непрерывности $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в области E выполнение условий Коши – Римана всюду в E необходимо и достаточно для аналитичности $f(z)$ в этой области.

В случае существования производная $f'(z)$ может быть вычислена по любому из равенств

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Отметим, что аналитическая в области E функция имеет всюду в E производную любого порядка. В этом смысле в комплексном анализе из однократной дифференцируемости следует бесконечная дифференцируемость.

Условия Коши – Римана могут быть сформулированы в других терминах. Пусть, например, $z = x+iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $= U(r,\varphi) + iV(r,\varphi)$. Тогда соотношения (5.1) эквивалентны равенствам

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial V}{\partial r}\,.$$

Пример 5.1. Найдём области дифференцируемости и аналитичности функций $f(z) = e^z$, $g(z) = \overline{z}$, $h(z) = \operatorname{Re} z^2$.

Так как $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, то $u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = e^x\sin y$. Функции u и v действительных переменных x,y дифференцируемы в любой точке (x,y), так как имеют непрерывные частные производные. Как нетрудно видеть, условия (5.1) выполняются также в любой точке. Следовательно, $f(z)$ дифференцируема всюду в $\mathbb{C}$, а значит, является аналитической на всей комплексной плоскости.

Действительная и мнимая части $g(z)$ есть соответственно x и $-y$. Первое из условий (5.1) не выполняется ни в одной точке. Поэтому $g(z)$ нигде не дифференцируема и, следовательно, не является аналитической ни в какой области.

Для функции $h(z) = \operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$ условия Коши – Римана выполняются лишь в точке $x = y = 0$. Так как частные производные действительной и мнимой частей $h(z)$ всюду непрерывны, то $h(z)$ дифференцируема в точке $z = 0$, но только в этой единственной точке. Поэтому $h(z)$ не является аналитической ни в какой области.

Пример 5.2. Найдём аналитическую функцию $f(z)$ по известной её действительной части $u(x, y) = 2e^x \cos y$ и условию $f(0) = 2$.

По левому из условий (5.1)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y,$$

откуда

$$v(x, y) = \int 2e^x \cos y \, dy = 2e^x \sin y + \lambda(x).$$

Продифференцируем $v(x, y)$ по x и используем правое условие (5.1):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y + \lambda'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

откуда $\lambda'(x) = 0$, то есть $\lambda(x) = C = \text{const}$. Мы получили, что

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 2e^x \cos y + i \left(2e^x \sin y + C\right).$$

Условие $f(0) = 2$ даёт теперь $C = 0$. Поэтому

$$f(z) = 2e^x(\cos y + i \sin y) = 2e^{x+iy} = 2e^z.$$

Упражнения

1) Проверить выполнение условий Коши – Римана для функции $f(z)$.

5.1. $f(z) = z^2$. **5.2**. $f(z) = z^3$.

5.3. $f(z) = z^4$. **5.4**. $f(z) = z^n$.

5.5. $f(z) = e^z$. **5.6**. $f(z) = \cos z$.

5.7. $f(z) = \sin z$. **5.8**. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

5.9. $f(z) = \operatorname{ch} z$. **5.10**. $f(z) = ze^z$.

2) Определить точки дифференцируемости и область аналитичности функции $f(z)$. Найти производную в точках существования.

5.11. $f(z) = z^2\,\overline{z}$. **5.12**. $f(z) = z^2 + \overline{z}$.

5.13. $f(z) = |z|\,\overline{z}$. **5.14**. $f(z) = |z|^2\operatorname{Re}\overline{z}$.

5.15. $f(z) = |z|^2\operatorname{Im} z$. **5.16**. $f(z) = z\operatorname{Im} z$.

5.17. $f(z) = z\operatorname{Re} z$. **5.18**. $f(z) = 2|z|^2$.

5.19. $f(z) = iz + z\overline{z}$. **5.20**. $f(z) = f(x+iy) = 2xy + iy^2$.

2) Выяснить, существует ли аналитическая функция, имеющая данную действительную часть $u(x, y)$ или данную мнимую часть $v(x, y)$.

5.21. $u(x, y) = x^2 y$. **5.22**. $v(x, y) = x^2 - y^2$.

5.23. $v(x, y) = 4e^x \sin 2y$. **5.24**. $u(x, y) = x + y$.

5.25. $v(x, y) = 6xy$.

3) Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по её указанным свойствам.

5.26. $u(x, y) = e^{-y}\cos x + 2x + 3, \qquad f(0) = 4 - i$.

5.27. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, \qquad f(i) = -1 + 2i$.

5.28. $v(x, y) = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), \qquad f(0) = 0$.

5.29. $u(x, y) = 2\sin x \operatorname{ch} y - x, \qquad f(0) = 0$.

5.30. $v(x, y) = 4\operatorname{sh} x \sin y + 2xy, \qquad f(0) = 3$.

4) Дополнительные задачи.

5.31. Доказать, что если аналитическая функция является действительной, то она постоянна.

5.32. Доказать, что для функции $f(z) = \sqrt{|xy|}$ условия Коши – Римана (5.1) в точке $z = 0$ выполняются, но производная не существует.

5.33. Доказать, используя определение дифференцируемости, что если функция $f(z) = f\Big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big) = U(r,\varphi) + iV(r,\varphi)$ имеет производную в некоторой точке, то в этой точке выполняются следующие условия Коши – Римана в полярных координатах r, φ :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial V}{\partial r}\,.$$

5.34. Вывести условия Коши – Римана в полярных координатах (см. предыдущую задачу) из стандартных условий (5.1) и равенств

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ U(r,\varphi) = u(x,y),\ V(r,\varphi) = v(x,y).$$

§ 6. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая Жордана с концами в точках α и β; $f(z)$ — однозначная функция комплексного переменного z, заданная на Γ. Обозначим через z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, точки на Γ, $z_0 := \alpha$, $z_{n+1} := \beta$, следующие в положительном направлении; через ω_k — точку дуги $z_k z_{k+1}$. Положим $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$. Предположим, что при $\max|\Delta z_k| \to 0$ существует предел интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n} f(\omega_k)\Delta z_k,$$

не зависящий ни от способа деления Γ точками z_k, ни от выбора точек ω_k на дугах $z_k z_{k+1}$. В этом случае $f(z)$ называется интегрируемой по Γ и

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz := \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} f(\omega_k)\Delta z_k. \tag{6.1}$$

Будем считать, что $f(z)$ непрерывна или хотя бы кусочно-непрерывна на кривой Γ; тогда $f(z)$ является интегрируемой по этой кривой.

Пусть $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Из (6.1) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\Gamma} u\,dy + v\,dx. \tag{6.2}$$

Если Γ — гладкая кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, то каждый из криволинейных интегралов 2 рода, стоящих в (6.2), может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_{\Gamma} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[p(x(t),y(t))x'(t) + q(x(t),y(t))y'(t)\Big]\,dt. \tag{6.3}$$

Более короткая формула замены переменных имеет вид

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]z'(t)\,dt. \tag{6.4}$$

Здесь $z(t) = x(t) + iy(t)$ — параметрическое задание гладкой кривой Γ в комплексном виде; $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в области E, Γ — контур, лежащий в E, то

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

(теорема Коши; равенство верно и в случае, если Γ — кусочно-гладкая граница E, $f(z)$ аналитична в E и непрерывна на Γ).

Для аналитической функции интеграл по кривой, соединяющей точки z_0, $z_1 \in E$, не зависит от пути интегрирования и справедлив аналог формулы Ньютона – Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0). \tag{6.5}$$

В этом равенстве $F(z)$ — любая первообразная $f(z)$, то есть функция, для которой $F'(z) = f(z)$.

Для аналитических в односвязной области E функций $f(z)$ и $g(z)$ и любых точек z_0, $z_1 \in E$ справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\,dz = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)\,dz. \tag{6.6}$$

Если функция $f(z)$ является аналитической в области E, ограниченной контуром Γ, и на самом контуре, точка z_0 принадлежит E, то справедливы интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz, \tag{6.7}$$

а также её обобщение на случай произвольного $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz. \tag{6.8}$$

Формулы (6.7) – (6.8) могут применяться для вычисления некоторых интегралов.

Пример 6.1. Вычислим интеграл

$$\int_\Gamma (1 + i - 2\overline{z})\, dz$$

1) по отрезку, соединяющему точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$; 2) по части параболы $y = x^2$, соединяющей точки z_1, z_2. Убедимся, что при изменении пути интегрирования значение интеграла здесь меняется. (Как отмечалось, свойство независимости интеграла от пути имеет место для аналитической функции; нетрудно проверить, что в этом примере интегрируемая функция таковой не является.)

Пусть $f(z) = 1 + i - 2\overline{z}$, тогда $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = 1 - 2x$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = 1 + 2y$.

1) Запишем действительные параметрические уравнения Г в виде $x(t) = t$, $y(t) = t$, $0 \le t \le 1$, и применим формулы (6.2) и (6.3):

$$\int_\Gamma (1 + i - 2\overline{z})\, dz =$$

$$= \int_\Gamma (1 - 2x)\, dx - (1 + 2y)\, dy + i \int_\Gamma (1 - 2x)\, dy + (1 + 2y)\, dx =$$

$$\int_0^1 \Big[(1 - 2t) - (1 + 2t)\Big]\, dt + i \int_0^1 \Big[(1 - 2t) + (1 + 2t)\Big]\, dt = -2 + 2i.$$

Тот же результат получится, если воспользоваться параметрическим уравнением отрезка $z_1 z_2$ в комплексном виде: $z(t) = t + it, 0 \le t \le 1$, и затем применить равенство (6.4). Заметим, что $\overline{z} = t - it$, $z'(t) = 1 + i$. На этот раз интегрируется комплекснозначная функция действительного аргумента t :

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_0^1 f[z(t)] z'(t)\, dt =$$

$$\int_0^1 \Big(1 + i - 2(t - it)\Big)(1 + i) dt = \int_0^1 (-4t + 2i) dt = -2 + 2i.$$

2) Комплексное параметрическое уравнение части параболы $y = x^2$ между точками $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$ есть $z(t) = t + it^2$, $0 \le t \le 1$. Значит, $\overline{z} = t - it^2$, $z'(t) = 1 + 2ti$. По формуле (6.4)

$$\int_\Gamma (1 + i - 2\overline{z})\, dz = \int_0^1 \Big(1 + i - 2(t - it^2)\Big)(1 + 2ti)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \Big(-4t^3 - 4t + 1 + i(-2t^2 + 2t + 1)\Big)\, dt = -2 + \frac{4}{3}\, i.$$

Пример 6.2. Вычислим интеграл

$$\int_\Gamma (z^2 + z\overline{z})\, dz$$

по дуге Γ окружности $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$.

Параметрическое уравнение Γ есть $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$. Так как $dz = ie^{it}\, dt$, $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, то по (6.4)

$$\int_\Gamma (z^2 + z\overline{z})\, dz = \int_0^\pi \left(e^{i\cdot 2t} + 1\right) ie^{it}\, dt =$$

$$i \int_0^\pi \left(e^{i\cdot 3t} + e^{it}\right) dt = i \left(\frac{1}{3i}\, e^{i\cdot 3t} + \frac{1}{i}\, e^{it}\right)\Bigg|_0^\pi = -\frac{8}{3}\, .$$

Пример 6.3. Вычислим интеграл

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\, dz.$$

Подынтегральная функция является аналитической всюду, её первообразная есть $z^3 + z^2$. Поэтому по формуле Ньютона – Лейбница (6.5)

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\, dz = (z^3 + z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i.$$

Пример 6.4. Вычислим интеграл

$$\int_0^i z \cos z\, dz.$$

Так как $f(z) = z$ и $g(z) = \cos z$ являются аналитическими всюду, то можно применить интегрирование по частям (6.6):

$$\int_0^i z \cos z\, dz = \int_0^i z(\sin z)'\, dz = (z \sin z)\Big|_0^i - \int_0^i \sin z\, dz =$$

$$= i\sin i + \cos z\Big|_0^i = -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 =$$

$$= -\frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{e + e^{-1}}{2} - 1 = \frac{1}{e} - 1.$$

Пример 6.5. Вычислим интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\, dz$$

по следующим окружностям: 1) $\Gamma : |z - 2| = 1$; 2) $\Gamma : |z - 2| = 3$; 3) $\Gamma : |z - 2| = 5$.

1) В замкнутой области $|z-2| \le 1$ подынтегральная функция является аналитической, поэтому по теореме Коши интеграл равен 0.

2) Внутри замкнутой области $|z - 2| \le 3$ имеется единственный простой нуль знаменателя $z = 0$. Так как функция $e^z/(z - 6)$ в этой области является аналитической, то по интегральной формуле Коши (6.7)

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\, dz = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z/(z-6)}{z}\, dz =$$

$$= 2\pi i \frac{e^z}{z - 6}\Big|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}\,.$$

3) Внутри замкнутой области $|z - 2| \le 5$ находятся оба простых нуля знаменателя $z = 0$, $z = 6$. Окружим эти точки непересекающимися контурами γ_1 и γ_2, целиком лежащими внутри Γ. В трёхсвязной области, ограниченной Γ, γ_1 и γ_2, подынтегральная функция является аналитической, поэтому по теореме Коши для многосвязной области

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\, dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\, dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\, dz.$$

Каждый из двух интегралов, стоящих в правой части, может быть вычислен с помощью интегральной формулы Коши. Здесь важна правильная запись подынтегральной функции:

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\, dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z/(z-6)}{z}\, dz = 2\pi i \frac{e^z}{z - 6}\Big|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}\,,$$

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\, dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z/z}{z - 6}\, dz = 2\pi i \frac{e^z}{z}\Big|_{z=6} = \frac{e^6 \pi i}{3}\,.$$

Поэтому

$$I = -\frac{\pi i}{3} + \frac{e^6 \pi i}{3} = \frac{e^6 - 1}{3}\,\pi i.$$

Пример 6.6. Вычислим интеграл

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz.$$

Представим этот интеграл в виде

$$J = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z/(z+1)^2}{(z-1)^2}\,dz.$$

Числитель подынтегрального выражения есть функция, аналитическая в замкнутой области $|z-1| \le 1$, а точка $z_0 = 1$ лежит внутри неё. Поэтому можно применить формулу (6.8) с $n = 1$:

$$J = 2\pi i \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\right)'\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^2}{2}\,i.$$

Упражнения

1) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz,$$

Γ — отрезок с концами в точках z_1 и z_2, проходимый от z_1 к z_2.

6.1. $f(z) = 2\mathrm{Re}\, z^2 - \overline{z} + 1 - i, \qquad z_1 = 0, z_2 = -3 + i$.

6.2. $f(z) = (1+i)\mathrm{Im}\, z^2 + \overline{z}, \qquad z_1 = i, z_2 = -3i$.

6.3. $f(z) = 3z + (1+i)\overline{z}^2, \qquad z_1 = 1, z_2 = 4i$.

6.4. $f(z) = 2z^2 - 3\overline{z} + 2, \qquad z_1 = 0, z_2 = -1 - i$.

6.5. $f(z) = |z|^2 - 3i, \qquad z_1 = -1, z_2 = i$.

6.6. $f(z) = -\mathrm{Re}\, z^2 + 5\overline{z}, \qquad z_1 = -1 + i, z_2 = 1 - 4i$.

6.7. $f(z) = 3z\overline{z} + iz, \qquad z_1 = 5i, z_2 = 0$.

6.8. $f(z) = \mathrm{Im}\, z^2 + \overline{z}^2, \qquad z_1 = 0, z_2 = 1 + i$.

6.9. $f(z) = 2\mathrm{Im}\, \overline{z}^2 + i, \qquad z_1 = -1, z_2 = -1 - 2i$.

6.10. $f(z) = z\overline{z} + 4z + 1, \qquad z_1 = -1 - i, z_2 = 1 + i$.

2) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz.$$

6.11. $f(z) = z\mathrm{Im}\, z$, Γ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ против часовой стрелки.

6.12. $f(z) = z\mathrm{Im}\, z^2$, Γ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ по часовой стрелке.

6.13. $f(z) = \overline{z}\mathrm{Re}\, z^2$, Γ — окружность $|z| = 1$.

6.14. $f(z) = z\mathrm{Re}\, z$, Γ — окружность $|z| = 2$.

6.15. $f(z) = z(\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)$, Γ — дуга окружности $|z| = 1$, проходимая от точки $z_1 = -1$ до точки $z_2 = 1$ по часовой стрелке.

3) Вычислить с помощью формулы Ньютона – Лейбница (6.5).

6.16. $\displaystyle\int\limits_{1+i}^{1-i} e^z\, dz$. **6.17**. $\displaystyle\int\limits_{i}^{1} \cos z\, dz$.

6.18. $\displaystyle\int\limits_{2-i}^{i} (3z^2 + z)\, dz$. **6.19**. $\displaystyle\int\limits_{1-i}^{1+i} \sin z\, dz$.

6.20. $\displaystyle\int\limits_{0}^{i} \mathrm{ch}\, z\, dz$.

4) Вычислить с помощью интегрирования по частям.

6.21. $\displaystyle\int\limits_{0}^{i} ze^z\, dz.$ **6.22**. $\displaystyle\int\limits_{i}^{1+i} z\cos z\, dz$.

6.23. $\displaystyle\int\limits_{i}^{1} z\,\mathrm{ch}\, z\, dz.$ **6.24**. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2+i} z\,\mathrm{sh}\, z\, dz$.

6.25. $\displaystyle\int\limits_{1-i}^{1+i} z\sin z\, dz$.

5) Вычислить с помощью интегральной формулы Коши (6.7).

$$\mathbf{6.26}. \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)}\,dz,$$

a) Γ — окружность $|z-1+i| = 10$; b) Γ — окружность $|z-1+i| = 3/2$.

$$\mathbf{6.27}. \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z-1)}\,dz,$$

a) Γ — окружность $|z-i| = 8$; b) Γ — окружность $|z-1+i| = 6/5$.

$$\mathbf{6.28}. \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)}\,dz,$$

a) Γ — окружность $|z-2| = 5$; b) Γ — окружность $|z-2| = 1$.

$$\mathbf{6.29}. \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)(z-2i)}\,dz,$$

a) Γ — окружность $|z-3i| = 20$; b) Γ — окружность $|z-3i| = 3/2$.

$$\mathbf{6.30}. \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}\,dz,$$

a) Γ — окружность $|z-1-i| = 8$; b) Γ — окружность $|z-1-i| = 4$.

6) Вычислить с помощью интегральной формулы Коши (6.7) и формулы (6.8).

$$\mathbf{6.31}. \quad \int\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-i)(z-1)^2}\,dz\ . \qquad \mathbf{6.32}. \quad \int\limits_{|z-2i|=10} \frac{e^z}{(z-1+i)^4}\,dz\ .$$

$$\mathbf{6.33}. \quad \int\limits_{|z+1|=4} \frac{\sin z}{(z-1)(z-i)^2}\,dz\ . \qquad \mathbf{6.34}. \quad \int\limits_{|z-2+i|=15} \frac{z\cos z}{(z+1-i)^3}\,dz\ .$$

$$\mathbf{6.35}. \quad \int\limits_{|z|=8} \frac{z\sin z}{(z-10)(z-2i)^3}\,dz\ .$$

7) Дополнительные задачи.

6.36. Вывести из определения интеграла равенство

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} z\,dz = z_2^2 - z_1^2.$$

6.37. Для $n \in \mathbb{Z}$, $R > 0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$ найти значение интеграла

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n \, dz \ .$$

§ 7. Области сходимости рядов

Для любой последовательности $\{c_n\}$ положительных чисел имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \,,$$

если оба этих предела существуют. Поэтому в случае существования пределов, о которых идёт речь ниже, для вычисления чисел R и r можно пользоваться любой из приведённых формул. В другой ситуации следует пользоваться формулой с корнем n-й степени и $\overline{\lim}$ вместо $\lim$. Ниже $a_n \in \mathbb{C}$.

Областью сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

является круг $|z-z_0| < R$, где R определяется формулами

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \,, \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \,. \tag{7.1}$$

Число R называется радиусом сходимости ряда.

На границе круга сходимости степенного ряда находится хотя бы одна особая точка функции, к которой сходится этот ряд. Поэтому радиус сходимости R ряда равен расстоянию от z_0 до ближайшей особой точки суммы ряда $f(z)$. По поводу особых точек см. § 9.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

сходится в области $|z-z_0| > r$, где r определяется формулами

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \ , \quad r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|} \,. \tag{7.2}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \Sigma_1 + \Sigma_2 \tag{7.3}$$

сходится в пересечении областей сходимости составляющих его рядов Σ_1 и Σ_2. Точнее, пусть r и R — числа, подсчитанные для рядов Σ_1 и Σ_2 по формулам (7.1) – (7.2). Если $r > R$, то ряд (7.3) расходится всюду. Если $r < R$, то ряд (7.3) сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$. Если же $r = R$, то не существует области, в которой сходится ряд (7.3), так как точки его сходимости, если они есть, принадлежат окружности $|z - z_0| = r = R$.

Пример 7.1. Найдём радиус и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot (z + 2 - i)^n .$$

Заметим, что $\cos in = \operatorname{ch} n = (e^n + e^{-n})/2$. Применим правую формулу из (7.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\operatorname{ch} n|}{|\operatorname{ch}(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + e^{-2n}}{e + e^{-2n-1}} = \frac{1}{e} .$$

Поэтому область сходимости ряда есть круг $|z + 2 - i| < e^{-1}$.

Пример 7.2. Исследуем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1 + 2i)^n \cdot (z - i)^n .$$

Так как $|a_n| = |(-1 + 2i)^n| = 5^{n/2}$, то по левой формуле из (7.1)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Тот же результат даёт и правая формула:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n/2}}{|5^{(n+1)/2}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Круг сходимости ряда есть $|z - i| < 1/\sqrt{5}$.

Пример 7.3. Найдём область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 4i)^n}{(z + 1 + 2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1 + 2i)^n}{8^n} = \Sigma_1 + \Sigma_2 .$$

Для ряда Σ_1 имеем: $a_{-n} = (3 + 4i)^n$, $a_{-n-1} = (3 + 4i)^{n+1}$, поэтому по правой формуле из (7.2)

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|(3 + 4i)^{n+1}|}{|(3 + 4i)^n|} = \lim_{n\to\infty} |3 + 4i| = 5.$$

Ряд Σ_1 сходится в области $|z+1+2i|>5$.

Для ряда Σ_2 имеем: $a_n = 8^{-n}, a_{n+1} = 8^{-n-1}$. Радиус сходимости оказывается равным

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|8^{-n}|}{|8^{-n-1}|} = 8,$$

ряд сходится в области $|z+1+2i|<8$.

Таким образом, $r = 5 < R = 8$. Значит, исходный ряд сходится в кольце $5 < |z+1+2i| < 8$.

У п р а ж н е н и я

1) Определить радиус сходимости и область сходимости ряда.

7.1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{in}(z-1+i)^n$. **7.2.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n$.

7.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi/n}(z-3+2i)^n$. **7.4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$.

7.5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+5-i)(z-2i)^n$.

2) Определить область сходимости ряда.

7.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^n(z+5i)^n}$. **7.7.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+3i)^n}{(z-1+i)^n}$.

7.8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(iz)^n}$. **7.9.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n(z+i)^n}$.

7.10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5}{(z-1+i)^n}$.

3) Определить область сходимости ряда.

7.11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-3+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(3+in)(z-3+2i)^n$.

7.12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z-4i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-4i}{5}\right)^n$.

$$\textbf{7.13}.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1-5i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1-5i)^n}{3^{n+1}}\,.$$

$$\textbf{7.14}.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z-2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n!}\,.$$

$$\textbf{7.15}.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+5i)^n}{(z-4)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4)^n}{(3+4i)^n}\,.$$

4) Дополнительные задачи.

7.16. Пусть $c_n > 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}\,,$$

если оба предела существуют.

7.17. Пусть $a_n \in \mathbb{C}$. Верно ли, что из сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$? Наоборот, верно ли, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$? В случае отрицательного ответа на любой из вопросов привести контрпример.

§ 8. Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана

По теореме Тейлора, аналитическая в области E функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in E$ единственным образом разлагается в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \tag{8.1}$$

радиус сходимости которого не меньше расстояния от z_0 до границы E. Коэффициенты ряда Тейлора (8.1) могут быть найдены по формулам

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi,\quad n=0,1,2,\ldots; \tag{8.2}$$

Γ — произвольная окружность с центром в z_0, принадлежащая E.

Теорема Лорана утверждает, что функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (возможно, $r = 0$ или $R = \infty$), разлагается в этом кольце в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{8.3}$$

коэффициенты которого удовлетворяют равенствам

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi, \quad n \in \mathrm{Z}. \tag{8.4}$$

Здесь Γ — произвольная окружность с центром в z_0, лежащая внутри кольца. Представление функции $f(z)$ её рядом Лорана, то есть рядом вида (8.3), в данном кольце является единственным. Доказательство теоремы Лорана приведено в § 11 главы 2.

Практическое применение формул (8.2) и (8.4) обычно является затруднительным. Поэтому чаще с учётом свойства единственности ряда Тейлора или ряда Лорана нужное разложение получают каким-то иным способом. Например, во многих задачах можно использовать ряды Тейлора для e^z, $\sin z$, $\cos z$ (см. § 3), сходящиеся на всей комплексной плоскости, а также следующие ряды, радиус сходимости которых равен 1:

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots,$$

$$(1 + z)^b = 1 + bz + \frac{b(b-1)}{2!}\, z^2 + \ldots + \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{n!}\, z^n + \ldots$$

Здесь $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$ (Если b — неотрицательное целое, то правая часть содержит конечное число слагаемых.) В частности, полагая $b = -1$, имеем:

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots, \tag{8.5}$$

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots \tag{8.6}$$

Отметим ещё раз, что эти разложения справедливы для $|z| < 1$.

Пример 8.1. Написать разложение функции

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}$$

в ряд Лорана в следующих кольцах с центром в 0: 1) в круге $|z| < 1$; 2) в кольце $1 < |z| < 2$; 3) в кольце $2 < |z| < \infty$.

Прежде всего заметим, что $f(z)$ имеет две особые точки $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$, которые не принадлежат ни одной из данных областей. Следовательно, в каждой из областей функция $f(z)$ является аналитической и её разложение в ряд Лорана существует. Как оказывается, в различных кольцах для этой функции получаются различные разложения.

1) Для $|z| < 1$ запишем равенство

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z/2} - \frac{1}{1-z}\,.$$

Первое слагаемое представим в виде следующего ряда, сходящегося даже при $|z| < 2$:

$$\frac{1}{1+z/2} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \ldots \tag{8.7}$$

Мы использовали (8.5). Второе слагаемое представляется рядом (8.6) — этот ряд сходится при $|z| < 1$. Поэтому в круге $|z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \ldots\right) - (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\,z - \frac{7}{8}\,z^2 - \frac{17}{16}\,z^3 + \ldots$$

В этом случае ряд Лорана является рядом Тейлора.

2) В кольце $1 < |z| < 2$ ряд (8.7) сходится, мы его используем для представления дроби $1/(z+2)$. Однако ряд (8.6) теперь расходится; значит, для представления дроби $1/(z-1)$ требуется модификация. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z/2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z}\,.$$

Теперь можно применить равенство, вытекающее из (8.6):

$$\frac{1}{1-1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots \tag{8.8}$$

Этот ряд сходится для $|1/z| < 1$, то есть для $|z| > 1$. Собирая вместе нужные равенства, получим:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \ldots\right) + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n}\,.$$

3) Пусть теперь $|z| > 2$. Ряд (8.8) сходится, а для дроби $1/(z+2)$ требуется новое представление. Применим запись

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+2/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z}\,.$$

Первое слагаемое разложим с помощью (8.5), так как при $|2/z| < 1$, то есть $|z| > 2$, справедливо

$$\frac{1}{1+2/z} = 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \ldots$$

Учитывая это равенство и (8.8), получим:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \ldots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \ldots$$

Пример 8.2. Представим рядом Лорана с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = z^2 \cos(1/z)$.

Функция является аналитической в кольце $0 < |z| < \infty$. Так как для любого $\xi \in \mathbb{C}$

$$\cos\xi = 1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - \frac{\xi^6}{6!} + \ldots,$$

то, полагая $\xi = 1/z$, имеем:

$$f(z) = z^2\left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6}\right) = -\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \ldots$$

Упражнения

1) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0. Найти радиус сходимости ряда.

8.1. $f(z) = \dfrac{4}{z+2}$, $z_0 = -1$. **8.2.** $f(z) = \dfrac{2}{z-6}$, $z_0 = 2$.

8.3. $f(z) = \dfrac{5}{z-i}$, $z_0 = 1$. **8.4.** $f(z) = \dfrac{2}{z+i}$, $z_0 = 2+i$.

8.5. $f(z) = \dfrac{3z+2}{z+5}$, $z_0 = 1$. **8.6.** $f(z) = \dfrac{2z+1}{z+3}$, $z_0 = 2$.

8.7. $f(z) = \dfrac{z-1}{z+3}$, $z_0 = i$. **8.8.** $f(z) = \dfrac{z-2}{z+5}$, $z_0 = -1$.

8.9. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z+1}$, $z_0 = -i$. **8.10**. $f(z) = \dfrac{3z}{z^2-1}$, $z_0 = 0$.

2) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$.

8.11. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$. **8.12**. $f(z) = \dfrac{\cos^2 z}{z^2}$.

8.13. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4}$. **8.14**. $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

8.15. $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z}$. **8.16**. $f(z) = \cos \dfrac{1}{z^2}$.

8.17. $f(z) = z^4 \cos \dfrac{1}{z}$. **8.18**. $f(z) = \dfrac{1}{z} \sin^2 \dfrac{2}{z}$.

8.19. $f(z) = \dfrac{1+\cos z}{z^3}$. **8.20**. $f(z) = \dfrac{1-e^{-z}}{z^6}$.

3) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

8.21. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-5z+4}$, $1 < |z| < 4$.

8.22. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-5z+4}$, $4 < |z| < \infty$.

8.23. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-8z+15}$, $3 < |z| < 5$.

8.24. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-8z+15}$, $5 < |z| < \infty$.

8.25. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}$, $0 < |z| < 1$.

8.26. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}$, $1 < |z| < \infty$.

8.27. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $1 < |z+2| < 4$.

8.28. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $0 < |z-i| < 2$.

8.29. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-4z+3}$, $1 < |z| < 3$.

8.30. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-4z+3}$, $3 < |z| < \infty$.

4) Дополнительные задачи.

8.31. Найти радиус сходимости ряда Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$ функции $f(z) = \operatorname{tg} z$, не выписывая явно этого ряда.

8.32. Доказать, что аналитическая в окрестности точки $z_0 = 0$ функция $f(z)$, удовлетворяющая условию $f(2z) = f(z)$, есть константа.

8.33. Пусть $f(z)$ — аналитическая в кольце $r < |z| < R$ функция,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

— её разложение в ряд Лорана в этом кольце. Доказать, что если $f(-z) = f(z)$ при всех z, то $a_{2n+1} = 0$, а если $f(-z) = -f(z)$ при всех z, то $a_{2n} = 0$.

§ 9. Изолированные особые точки. Вычеты

Пусть функция $f(z)$ определена в области E. Точка $z_0 \in \overline{E}$ называется правильной точкой этой функции тогда и только тогда, когда существует степенной ряд с центром в z_0 и ненулевым радиусом сходимости, который в общей части своего круга сходимости и E сходится к $f(z)$. Точка $z_0 \in \overline{E}$, не являющаяся правильной точкой функции $f(z)$, называется её особой точкой. Если $f(z)$ — аналитическая в E, то все точки E являются правильными, а точки границы области — правильными или особыми. Особая точка функции называется изолированной тогда и только тогда, когда в некоторой её окрестности нет других изолированных точек этой функции.

Пусть $z_0 \neq \infty$ — изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ функция является аналитической, а значит, разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{9.1}$$

Точка z_0 называется устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда ряд (9.1) не содержит отрицательных степеней $z - z_0$.

Точка z_0 называется полюсом тогда и только тогда, когда ряд (9.1) содержит конечное число отрицательных степеней $z - z_0$. Более точно, z_0 называется полюсом порядка m в том и только том случае, когда минимальный имеющийся в (9.1) отрицательный показатель есть $-m$. Это эквивалентно тому, что в некоторой окрестности z_0 справедливо представление

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}\,, \quad g\text{— аналитическая, } g(z_0) \neq 0.$$

Точка z_0 называется существенно особой точкой тогда и только тогда, когда ряд (9.1) содержит бесконечное число отрицательных степеней $z-z_0$.

Каждый вид изолированной особой точки z_0 характеризуется своим поведением $f(z)$ при $z \to z_0$. Если z_0 является устранимой (и только в этом случае), то существует конечный предел $f(z)$ при $z \to z_0$ (иначе: функция $f(z)$ ограничена по модулю в окрестности z_0). Если z_0 является полюсом (и только в этом случае), то существует бесконечный предел $f(z)$ при $z \to z_0$ (иначе: функция $f(z)$ не ограничена по модулю в окрестности z_0). Наконец, когда z_0 является существенно особой точкой (и только тогда), не существует конечного или бесконечного предела $f(z)$ при $z \to z_0$. В последнем случае для любого комплексного числа B, включая и $B = \infty$, найдётся такая последовательность $z_n \to z_0$, для которой $f(z_n) \to B$ (теорема Сохоцкого – Вейерштрасса).

Точка $z_0 = \infty$ называется изолированной особой точкой $f(z)$, если в некоторой окрестности $|z| > R$ этой точки нет конечных изолированных особых точек. В этом случае в кольце $R < |z| < \infty$ функция является аналитической и представляется рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \tag{9.2}$$

Точка $z_0 = \infty$ называется устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой в ситуациях, когда ряд (9.2) соответственно не содержит, содержит конечное число или содержит бесконечное число положительных степеней z. Поведение $f(z)$ при $z \to \infty$ в зависимости от характера особой точки (устранимая, полюс, существенно особая) ровно такое же, как и в случае конечной z_0.

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в конечной изолированной особой точке z_0 называется величина коэффициента a_{-1} из разложения (9.1):

$$\operatorname{res}\,[f(z); z_0] := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz. \tag{9.3}$$

Здесь Γ — контур, содержащий z_0 внутри себя и лежащий в области аналитичности. Правое равенство следует из формулы для коэффициентов ряда Лорана, см. § 8 и подробнее § 11 главы 2.

Наряду с (9.3) справедливы и другие равенства для вычисления вычетов.

Если z_0 — устранимая особая точка, то $\operatorname{res}\,[f(z); z_0] = 0$.

Пусть z_0 — полюс первого порядка. Тогда

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{9.4}$$

Если $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, причём $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\,. \tag{9.5}$$

Пусть z_0 — полюс порядка m. Тогда

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big[(z - z_0)^m f(z)\Big]^{(m-1)}. \tag{9.6}$$

При $m = 1$ (9.6) совпадает с (9.4).

Если z_0 — существенно особая точка, то для вычисления вычета в z_0 следует использовать ряд Лорана (взять его коэффициент a_{-1}) или использовать другие соображения. Например, если $z_0 = 0$ и $f(-z) = f(z)$, то все коэффициенты Лорана с нечётными номерами, а значит, и a_{-1}, равны нулю.

Вычет $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 = \infty$ находится из разложения (9.2); на этот раз полагают

$$\operatorname{res}[f(z); \infty] := -a_{-1}.$$

Пример 9.1. Найдём конечные изолированные особые точки и вычеты в них следующих функций:

$$f_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}\,, \quad f_2(z) = \frac{1}{z^4 + 1}\,, \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{(z+1)^2 (z-1)}\,,$$

$$f_4(z) = e^{1/z^2}\,, \quad f_5(z) = z^3 \sin\frac{1}{z^2}\,.$$

Особая точка функции $f_1(z) = (e^z - 1)/z$ есть $z_0 = 0$. Воспользуемся разложением в окрестности нуля функции e^z. Получим, что ряд Лорана с центром в 0 функции $f_1(z)$ не содержит отрицательных степеней z. Это означает, что z — устранимая особая точка. Тот же результат следует из конечности предела $f_1(z)$ при $z \to 0$:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Так как $z_0 = 0$ — устранимая, то $\operatorname{res}[f_1(z); 0] = 0$.

Изолированные особые точки функции $f_2(z) = 1/(z^4 + 1)$ есть корни знаменателя

$$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{i\cdot 3\pi/4}, \quad z_3 = e^{-i\cdot\pi/4}, \quad z_4 = e^{-i\cdot 3\pi/4}.$$

В окрестности z_1

$$f_2(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{h(z)}{z-z_1}\,,$$

$h(z)$ — аналитическая, $h(z_1) \neq 0$. Поэтому z_1 — полюс первого порядка функции $f_2(z)$. То же следует и из представления $f_2(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, $\varphi(z_1) \neq 0$, $\psi(z_1) = 0$, $\psi'(z_1) \neq 0$: в нашей ситуации $\varphi(z) = 1$, $\psi(z) = z^4 + 1$. По формуле (9.5)

$$\operatorname{res}\,[f_2(z); z_1] = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} = \frac{z_1}{-4} = -\frac{1}{4}\,e^{i\pi/4}.$$

Аналогично рассматриваются точки z_2, z_3, z_4.

Записав $f_3(z)$ в виде

$$f_3(z) = \frac{\sin z/(z+1)^2}{(z-1)} = \frac{\sin z/(z-1)}{(z+1)^2}\,,$$

убеждаемся, что эта функция имеет две особые точки: $z_1 = 1$ — полюс первого порядка, $z_2 = -1$ — полюс второго порядка. Применим равенства (9.4) и (9.6) (в последнем возьмём $m = 2$) :

$$\operatorname{res}\,[f_3(z); 1] = \lim_{z\to 1} \frac{\sin z}{(z+1)^2} = \frac{\sin 1}{4}\,,$$

$$\operatorname{res}\,[f_3(z); -1] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\left(\frac{\sin z}{z-1}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{z\cos z - \cos z - \sin z}{(z-1)^2} = -\frac{\sin 1}{4}\,.$$

Единственная конечная изолированная особая точка функции $f_4(z) = e^{1/z^2}$ есть $z_0 = 0$. Воспользуемся рядом Тейлора для e^{ξ} и положим $\xi = 1/z^2$:

$$e^{\xi} = 1 + \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots = 1 + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \ldots$$

Это означает, во-первых, что $z_0 = 0$ — существенно особая точка функции $f_4(z)$ (в разложении присутствует бесконечное число отрицательных степеней z), а во-вторых, что $\operatorname{res}\,[f_4(z); 0] = a_{-1} = 0$. Другой способ установить характер особенности дают соотношения

$$\lim_{z=x\to 0} e^{1/z^2} = \infty \neq \lim_{z=iy\to 0} e^{1/z^2} = 0.$$

Они означают, что конечного или бесконечного предела $f_4(z)$ при $z \to 0$ не существует.

Наконец, единственной конечной изолированной особой точкой функции $f_5(z) = z^3 \sin(1/z^2)$ является $z_0 = 0$. Так как разложение Лорана в окрестности нуля имеет вид

$$f_5(z) = z^3 \left(\frac{1}{1!z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \ldots \right) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} - \ldots,$$

то $z_0 = 0$ — существенно особая точка функции и вычет в ней равен 0.

Пример 9.2. Определим характер изолированной особой точки $z_0 = \infty$ функций $2z^7 - z^5 + 1$, $\sin z$, e^z, e^{1/z^2}.

Разложения Лорана в окрестности $z_0 = \infty$ есть разложения по степеням z. Для всех функций они записываются очевидным образом. Получается, что ∞ есть полюс седьмого порядка функции $2z^7 - z^5 + 1$, существенно особая точка функций $\sin z$ и e^z, устранимая особая точка функции e^{1/z^2}.

Упражнения

1) Найти все конечные изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить характер каждой из них.

9.1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-1)(z+1-i)^3}$.

9.2. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z+2+2i)^2(z-i)}$.

9.3. $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{(z+1)(z+2)(z-3)^3}$.

9.4. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z - 1}{z(z-1+3i)^5}$.

9.5. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z(z-1+5i)^3}$.

9.6. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z(z+3i)^2}$.

9.7. $f(z) = z^2 e^{1/z}$.

9.8. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(z-1+3i)^4}$.

9.9. $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z}$.

9.10. $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z^2}$.

2) Указать характер изолированной особой точки $z_0 = \infty$ функции $f(z)$.

9.11. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3+1}$.

9.12. $f(z) = \dfrac{z^5}{3z^5+4}$.

9.13. $f(z) = \dfrac{z^4+1}{e^z}$.

9.14. $f(z) = ze^{-z}$.

9.15. $f(z) = 2e^{-1/z^2}$.

9.16. $f(z) = z^2 e^{1/z}$.

9.17. $f(z) = (2z^2+z)e^z$.

9.18. $f(z) = e^{z/(1-z)}$.

9.19. $f(z) = e^{z-1/z}$.

9.20. $f(z) = z\cos\dfrac{1}{2z^3+z}$.

3) Найти вычеты функции $f(z)$ в конечных изолированных особых точках.

9.21. $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

9.22. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z(z-i)^2}$.

9.23. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+2i)^2(z+1)}$.

9.24. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2(z+2)^2}$.

9.25. $f(z) = \dfrac{e^{-1/z^2}}{z^2+1}$.

9.26. $f(z) = \dfrac{1}{z^5-1}$.

9.27. $f(z) = \sin\dfrac{1}{z^2} + z^4$.

9.28. $f(z) = \cos\dfrac{1}{z} + 2z^5$.

9.29. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z-i)^2}$.

9.30. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z-i)(z-1)^2}$.

4) Найти вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$.

9.31. $f(z) = \dfrac{z^2}{z+1}$.

9.32. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$.

9.33. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$.

9.34. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$.

9.35. $f(z) = (2z^3 + z^2 + 1)e^z$.

9.36. $f(z) = \dfrac{z}{3z+1}$.

9.37. $f(z) = \dfrac{3}{z} + z^{10} + 5$.

9.38. $f(z) = z\sin\dfrac{1}{z}$.

9.39. $f(z) = z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

9.40. $f(z) = z^2\cos\dfrac{1}{z}$.

5) Дополнительные задачи.

9.41. Привести пример аналитической функции, у которой было бы ровно две конечных особых точки: a) устранимая особая точка и полюс второго порядка; b) простой полюс и существенно особая точка; c) устранимая особая точка и существенно особая точка.

9.42. Привести пример аналитической функции, для которой $z = 1 + i$ является особой точкой, но не изолированной.

9.43. Привести пример аналитической функции, для которой $z = \infty$ является предельной точкой простых полюсов.

§ 10. Вычисление с помощью вычетов комплексных интегралов

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области E всюду за исключением конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n$; Γ — контур, лежащий в E и содержащий точки $z_1, \ldots, z_n$ внутри себя. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[f(z); z_k] \tag{10.1}$$

(теорема Коши о вычетах). Равенство (10.1) верно и в случае, когда Γ — граница E и $f(z)$ непрерывна в $\overline{E}$.

Пример 10.1. Вычислим интеграл

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\,dz.$$

Подынтегральная функция f аналитична в области $|z| < 4$ всюду за исключением точек $z_1 = 0$, $z_2 = -1$. Изолированная особая точка $z_1 = 0$ является устранимой, так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{z+1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Поэтому $\operatorname{res}\,[f(z); 0] = 0$. Изолированная особая точка $z_2 = -1$ является полюсом первого порядка. Это следует из представления

$$f(z) = \frac{(e^z - 1)/z}{z+1}\,,$$

в котором числитель есть функция, аналитическая в окрестности точки -1. Имеем:

$$\operatorname{res}\,[f(z); -1] = \lim_{z\to -1} \frac{e^z - 1}{z} = 1 - \frac{1}{e}\,.$$

По теореме о вычетах

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname{res}\,[f(z); 0] + \operatorname{res}\,[f(z); -1]\Big) = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Пример 10.2. Вычислим интеграл

$$\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1}\,dz.$$

В круге $|z-i| < 3/2$ подынтегральная функция $f(z)$ является аналитической всюду за исключением изолированных особых точек $z_1 = 0$ и $z_2 = i$.

Интересно, что при рассмотрении z_1 вычисления можно заменить рассуждениями! Точка $z_1 = 0$ является существенно особой для функции $g(z) = e^{1/z^2}$, так как её разложение по степеням z содержит бесконечное число отрицательных степеней. Это означает, что не существует конечного или бесконечного предела $g(z)$ при $z \to 0$. Поэтому не существует конечного или бесконечного предела $f(z)$ при $z \to 0$. Отсюда следует, что z_1 — существенно особая точка $f(z)$. В силу свойства $f(-z) = f(z)$ коэффициенты a_j с нечётными номерами лорановского разложения f в окрестности $z_1 = 0$ равны нулю. Значит, $\operatorname{res}[f(z); 0] = a_{-1} = 0$.

Точка же $z_2 = i$ является полюсом первого порядка $f(z)$, поэтому

$$\operatorname{res}[f(z); i] = \lim_{z\to i} \frac{e^{1/z^2}}{z+i} = \frac{1}{2ie}\,.$$

По теореме о вычетах

$$\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz = 2\pi i\Big(\operatorname{res}[f(z); 0] + \operatorname{res}[f(z); i]\Big) = \frac{\pi}{e}\,.$$

Упражнения

1) Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах.

10.1. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=5} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}\, dz\;.$ **10.2**. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4+1}\, dz\;.$

10.3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\sqrt{2}} \frac{z+1}{(z-i)(z+1)^2}\, dz\;.$ **10.4**. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=3} \frac{z}{(z+2)(z+3)^2}\, dz\;.$

10.5. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{z^3+1}\, dz\;.$ **10.6**. $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=2} \frac{(z+1)^2}{z-5}\, dz\;.$

10.7. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=10} \frac{z}{(z-2)^2}\, dz\;.$ **10.8**. $\displaystyle\int\limits_{|z-4|=1} \frac{z^3}{z(z-5)}\, dz\;.$

10.9. $\displaystyle\int\limits_{|z-1+i|=\sqrt{6}} \frac{z}{z^2+1}\, dz\;.$ **10.10**. $\displaystyle\int\limits_{|z-1+i|=2} \frac{1}{(z-1+i)(z-2+i)}\, dz\;.$

2) Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах.

10.11. $\displaystyle\int\limits_{|z-3i|=4} \frac{z}{e^z-1}\,dz$. **10.12**. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}\,dz$.

10.13. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{tg}\,\pi z\,dz$. **10.14**. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin\pi z}{z^2-z}\,dz$.

10.15. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z+3}\,dz$. **10.16**. $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2-4}\,dz$.

10.17. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}\,dz$. **10.18**. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^z\,\mathrm{ch}\,z\right)\,dz$.

10.19. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} (z^2+3)e^{1/z^2}\,dz$. **10.20**. $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=10} \frac{e^z}{z^2(z+i)}\,dz$.

3) Дополнительные задачи.

10.21. Вывести теорему о вычетах из теоремы Коши (по поводу последней см. § 6 настоящей главы и подробнее § 8 главы 2).

10.22. Какие из интегралов 10.1 – 10.20 могут быть вычислены с помощью интегральной формулы Коши (6.7) и её обобщения (6.8)? В двух-трёх случаях проведите необходимые вычисления.

§ 11. Вычисление с помощью вычетов действительных интегралов

Приведём некоторые примеры применения комплексного анализа для вычисления интегралов в действительной ситуации.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,z \geq 0$ и аналитична внутри неё всюду, кроме конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n$.

Сначала предположим дополнительно, что существуют такие константы $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, что при достаточно больших $|z|$ имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\varepsilon}}\,. \tag{11.1}$$

Неравенство (11.1) выполнено, например, в случае, когда $f(z) = p(z)/q(z)$, $p(z), q(z)$ — алгебраические многочлены, причём $\deg q(z) - \deg p(z) \geq 2$. В этом случае можно взять $\varepsilon = 1$. Если справедливо (11.1), то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[f(z); z_k]. \tag{11.2}$$

Теперь вместо (11.1) допустим, что $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$. Более точно, пусть $\gamma(r)$ есть полуокружность $|z| = r$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Сказанное означает, что при $r \to \infty$

$$L(r) := \max_{z\in\gamma(r)} |f(z)| \to 0. \tag{11.3}$$

В этой ситуации для $\lambda > 0$ выполняется равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[f(z)e^{i\lambda z}; z_k]. \tag{11.4}$$

При установлении (11.4) существенно используется тот факт, что если выполнено условие (11.3), то

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma(r)} f(z)e^{i\lambda z}\,dz = 0$$

(лемма Жордана). Так как $\cos\lambda x = \operatorname{Re} e^{i\lambda x}$, $\sin\lambda x = \operatorname{Im} e^{i\lambda x}$, то из равенства (11.4) следует, что при $\lambda > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx =$$

$$= \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[f(z)e^{i\lambda z}; z_k]\right), \tag{11.5}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx =$$

$$= \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[f(z)e^{i\lambda z}; z_k]\right). \tag{11.6}$$

Пример 11.1. Вычислим интеграл

$$I_1 = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

В силу чётности подынтегральной функции интеграл I_1 составляет половину интеграла по всей действительной прямой $(-\infty, \infty)$. Функция

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$

имеет в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ единственную особую точку — полюс второго порядка $z_1 = i$. Так как $f(z) = p(z)/q(z)$ — отношение двух многочленов, причём $\deg q(z) - \deg p(z) \geq 2$, то имеет место (11.1) с $\varepsilon = 1$. Значит, верно (11.2):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \operatorname{res}[f(z); i].$$

Остаётся найти вычет $f(z)$ в полюсе второго порядка i :

$$\operatorname{res}[f(z); i] = \lim_{z\to i}\Big[f(z)(z-i)^2\Big]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]' = -\frac{i}{4}\,.$$

Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Пример 11.2. Вычислим интеграл

$$I_2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\, dx.$$

Подынтегральная функция является чётной. Кроме того, $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\,\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\,\operatorname{Im} I_3.$$

Пусть

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}\,, \quad F(z) = f(z)\, e^{iz}.$$

Обе эти функции в верхней полуплоскости имеют полюс первого порядка в точке i. Если $|z| = r$, то

$$|f(z)| = \left|\frac{z}{z^2+1}\right| = \frac{1}{|z+1/z|} \leq \frac{1}{|z|-1/|z|} = \frac{1}{r-1/r}\,.$$

Мы использовали свойства модуля, в частности, неравенство $|z| - 1/|z| \le |z + 1/z|$, которое следует из неравенства треугольника. Пусть $\gamma(r)$ — полуокружность $|z| = r$, $\operatorname{Im} z \ge 0$. Тогда

$$L(r) = \max_{z\in\gamma(r)} |f(z)| \le \frac{1}{r - 1/r} \to 0, \quad r \to \infty.$$

Итак, сходимость (11.3) имеет место. Можно применить (11.4) с $\lambda = 1$:

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\, dx = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2+1}\,; i\right] = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{ze^{iz}}{z+i} = \frac{\pi i}{e}\,.$$

Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Im} I_3 = \frac{\pi}{2e}\,.$$

Упражнения

1) Вычислить действительный интеграл, переходя к функции комплексного переменного. Почему применима формула (11.2)?

11.1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+10}\, dx$. **11.2**. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-10x+34}\, dx$.

11.3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+5x^2+4}\, dx$. **11.4**. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+8}{(x^2+2x+2)^2}\, dx$.

11.5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$. **11.6**. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+1}\, dx$.

11.7. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx$. **11.8**. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx$.

11.9. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+5}\, dx$. **11.10**. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-8x+25}\, dx$.

2) Вычислить действительный интеграл, переходя к функции комплексного переменного и применяя формулы (11.4) – (11.6). Предварительно обосновать выполнение условия (11.3).

11.11. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}\,dx$. **11.12**. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$.

11.13. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-6x+10}\,dx$. **11.14**. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$.

11.15. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-10x+34}\,dx$. **11.16**. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)(x^2+16)}\,dx$.

11.17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+5}\,dx$. **11.18**. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$.

11.19. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+10x+50}\,dx$. **11.20**. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-4x+8}\,dx$.

3) Дополнительные задачи.

11.21. Пусть $f(z)=p(z)/q(z)$, p,q — многочлены и $\deg q-\deg p\geq 2$. Доказать, что тогда условие (11.1) выполняется с $\varepsilon=1$.

11.22. Выделяя особенность $z_0=0$ функции $f(z)=e^{i\lambda z}/z$, принадлежащую действительной оси, применяя лемму Жордана и теорему о вычетах, получить равенство

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin\lambda x}{x} = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lambda>0.$$

Глава 2. Избранные теоремы ТФКП

§ 1. Множества на расширенной комплексной плоскости

Расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ называется множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, пополненное идеальным числом $z = \infty$:

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Точка, соответствующая $z = \infty$, называется *бесконечно удалённой.*

Пусть $\delta > 0$. *δ-окрестностью точки* $z_0 \in \mathbb{C}$ называется множество $C(\delta; z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$. *$\delta$-окрестностью точки* ∞ называется множество $C(\delta; \infty) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \delta\}$.

Пусть $E \subset \overline{\mathbb{C}}$. Через ${}^cE$ обозначим дополнение E до $\overline{\mathbb{C}}$. Множество E называется *ограниченным*, если для некоторого $\delta > 0$ верно $E \subset C(\delta; 0)$, т. е. для любого $z \in E$ выполняется $|z| < \delta$.

Точка $z_0 \in E$ называется *изолированной точкой* E, если при некотором $\delta > 0$ пересечение E и $C(\delta; z_0)$ состоит из единственной точки z_0. Точка z_0 (не обязательно принадлежащая E) называется *предельной точкой* E, если при любом $\delta > 0$ окрестность $C(\delta; z_0)$ содержит бесконечно много точек из E. Это условие эквивалентно тому, что при любом $\delta > 0$ окрестность $C(\delta; z_0)$ содержит точку из E, отличную от z_0. Обозначим через E' совокупность всех предельных точек E. Множество E называется *замкнутым*, если $E' \subset E$, т. е. E содержит все свои предельные точки. *Замыканием* E называется множество $\overline{E} := E \cup E'$. Можно показать, что $\overline{E}$ — замкнутое множество, причем $\left(\overline{E}\right)' = E'$.

Границей множества E называется множество

$$\Gamma := \overline{E} \cap \overline{{}^cE}. \tag{1.1}$$

Граница E часто обозначается символом ∂E. Дадим более описательное определение Γ. Из (1.1) следует, что $z_0 \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда z_0 принадлежит одному из множеств E или ${}^cE$ и одновременно является предельной точкой другого. Это выполняется тогда и только тогда, когда при любом $\delta > 0$ окрестность $C(\delta; z_0)$ содержит как точки E, так и точки ${}^cE$. Справедливо следующее полезное утверждение.

Теорема 1.1. *Имеет место равенство* $\overline{E} = E \cup \Gamma$.

Доказательство содержится в цепочке включений

$$\overline{E} = E \cup E' = E \cup (E' \cap {}^cE) = E \cup (E' \cap \Gamma) = E \cup \Gamma.$$

$\square$

Точка $z_0 \in E$ называется *внутренней точкой* E, если существует $\delta > 0$, для которого $C(\delta; z_0) \subset E$, т. е. точка z_0 входит в E вместе с некоторой своей окрестностью. Совокупность внутренних точек E обозначается через $\operatorname{int} E$. Ясно, что $\operatorname{int} E \subset E$. Множество E называется *открытым,* если $\operatorname{int} E = E$. Это эквивалентно тому, что $E \subset \operatorname{int} E$, т. е. каждая точка E является внутренней.

Открытые и замкнутые множества обладают рядом свойств, из которых мы отметим следующие:

1) если E замкнуто, то ${}^cE$ открыто;
2) если E открыто, то ${}^cE$ замкнуто;
3) пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто;
4) объединение любого множества открытых множеств открыто;
5) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
6) пересечение конечного числа открытых множеств открыто;
7) каждое из множеств $\overline{\mathbb{C}}$ и $\emptyset$ одновременно открыто и замкнуто.

Непустое множество E называется *связным*, если не существует открытых множеств O_1, O_2 таких, что

$$E = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset, \quad O_1, O_2 \neq \emptyset.$$

Для непустого открытого E это определение эквивалентно тому, что любые две различные точки $z_1, z_2 \in E$ могут быть соединены ломаной, состоящей из конечного числа звеньев и принадлежащей E. Если z_1 или z_2 есть ∞, то одно звено ломаной предполагается бесконечным.

Областью называется открытое связное множество. Таким образом, под областью понимается непустое множество E, каждая точка которого входит в него вместе с некоторой окрестностью и любые две точки которого могут быть соединены ломаной, принадлежащей E. *Замкнутой областью* называется замыкание области.

Связное множество может быть односвязным или многосвязным. Назовём *компонентой (связности)* E любое его максимальное по включению связное подмножество. Иначе говоря, K есть компонента E тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $K \subset E$, K — связное;
2) если $K_1 \subset E$, ${}_1$ — связное и $K \subset K_1$, то $K_1 = K$.

Можно показать, что произвольное множество единственным образом представляется в виде объединения своих компонент.

Порядком связности связного множества называется число компонент его границы. Если число компонент границы Γ равно n, то говорят, что E является n-связным. Например, граница кольца

$$G = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \quad (0 \geq r < R < \infty)$$

состоит из двух компонент (окружностей $|z - z_0| = r$ и $|z - z_0| = R$), поэтому G — двусвязная область.

Ниже под $(n+1)$-связной областью E мы будем понимать совокупность точек, лежащих внутри внешнего контура Γ_0 и вне каждого из внутренних контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Предполагается, что $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ располагаются без взаимных пересечений внутри Γ_0. Множество

$$\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$$

называется *полной границей E;* оно состоит из $(n+1)$-й компоненты. Поэтому E $(n+1)$-связно.

Замкнутое подмножество расширенной комплексной плоскости называется *компактным.* Если компактное множество не содержит точку $z = \infty$, то оно ограничено. Таким образом, компактные подмножества $\overline{\mathbb{C}}$ — это множества двух видов:

1) замкнутые и ограниченные подмножества $\mathbb{C}$;

2) содержащие бесконечно удалённую точку и замкнутые.

Для компактных множеств справедливы два важных утверждения, которые мы сформулируем без доказательства.

Теорема 1.2 (принцип Больцано – Вейерштрасса). *Бесконечное подмножество компактного множества имеет предельную точку, принадлежащую этому множеству.*

Теорема 1.3 (лемма Гейне – Бореля – Лебега). *Множество E является компактным тогда и только тогда, когда из любого бесконечного открытого покрытия E можно извлечь конечное подпокрытие.*

§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел

Последовательность $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$ называется *сходящейся к* $z_0 \in \mathbb{C}$, если $\{z_k\}$ является ограниченной и z_0 является её единственной предельной точкой. Для таких последовательностей используют запись

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_0. \tag{2.1}$$

Число z_0 называют *пределом* $\{z_k\}$. *Расходящейся* называется последовательность, для которой конечного предела не существует.

Теорема 2.1. *Равенство* (2.1) *имеет место тогда и только тогда, когда вне любой окрестности z_0 находится не более конечного числа членов $\{z_k\}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что вне любой окрестности z_0 находится не более конечного числа z_k. Ясно, что тогда $\{z_k\}$ ограничена и

z_0 — её предельная точка. Другой предельной точки $w \neq z_0$ последовательность иметь не может, так как в этом случае вне некоторой окрестности z_0 находилось бы бесконечно много членов $\{z_k\}$. Мы применяем определение предельной точки из предыдущего параграфа. Итак, выполнено (2.1).

Пусть, наоборот, выполнено (2.1). По исходному определению $\{z_k\}$ ограничена и имеет единственную предельную точку z_0. В силу ограниченности существует $R > 0$ такое, что $\{z_k\} \subset C(R; z_0)$. Допустим, что при некотором $\delta > 0$ вне $C(\delta; z_0)$ находится бесконечное число z_k. Тогда кольцо $\delta \leq |z - z_0| \leq R$ содержит бесконечное число z_k. Это кольцо является компактным множеством, так как оно замкнуто и ограничено. Применяя принцип Больцано – Вейерштрасса (см. § 1), получаем, что в данном кольце имеется предельная точка $w \neq z_0$ последовательности $\{z_k\}$. Полученное противоречие означает, что вне любой окрестности z_0 находится не более конечного числа членов. □

Таким образом, (2.1) эквивалентно следующему "(ε-δ)-определению" предела. Равенство (2.1) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\delta > 0$ существует натуральное $n(\delta)$ такое, что для любого $k > n$ выполняется $|z_k - z_0| < \delta$. Последнее эквивалентно соотношению $|z_k - z_0| \to 0$, $k \to \infty$, записанному с помощью действительного анализа. Итак, (2.1) равносильно

$$\lim_{k\to\infty} |z_k - z_0| = 0. \tag{2.2}$$

Со сходящимися последовательностями можно выполнять те же действия, что и в действительном случае.

Дадим определение бесконечного предела. Пусть последовательность $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$ расходится и $z = \infty$ есть её единственная предельная точка. Тогда по определению полагаем

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \infty. \tag{2.3}$$

Аналогично предыдущему доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Равенство* (2.3) *имеет место тогда и только тогда, когда вне любой окрестности точки $z = \infty$ находится не более конечного числа членов* $\{z_k\}$.

Тем самым (2.3) эквивалентно тому, что для любого $\delta > 0$ существует натуральное $n(\delta)$ такое, что для любого $k > n$ выполняется $|z_k| > \delta$. Последнее же означает, что $|z_k| \to \infty$, $k \to \infty$.

Положим $z_k = a_k + ib_k$, $z_0 = a_0 + ib_0$.

Теорема 2.3. *Соотношение* (2.1) *эквивалентно одновременному выполнению равенств*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a_0, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = b_0. \tag{2.4}$$

Доказательство. По определению модуля комплексного числа

$$|a_k - a_0|,\ |b_k - b_0| \le \sqrt{(a_k - a_0)^2 + (b_k - b_0)^2} =$$

$$= |z_k - z_0| \le |a_k - a_0| + |b_k - b_0|.$$

Эти неравенства проверяются возведением в квадрат. Поэтому условие $|z_k - z_0| \to 0$ эквивалентно одновременному выполнению соотношений $|a_k - a_0| \to 0$ и $|b_k - b_0| \to 0 \ \ (k \to \infty)$. $\square$

Теорема 2.3 гарантирует, что со сходящимися последовательностями в комплексном случае можно выполнять те же действия, что и в действительном случае (например, предел суммы последовательностей равен сумме пределов и т. д.).

Последовательность $\{z_k\}$ называется *фундаментальной, или последовательностью Коши,* если для любого $\delta > 0$ существует натуральное $N(\delta)$ такое, что для любого натурального m выполняется $|z_{N+m} - z_N| < \delta$. Как и в действительном анализе, справедлив следующий критерий сходимости последовательности.

Теорема 2.4 (критерий Коши). *Последовательность является сходящейся тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.*

Доказательство. Фундаментальность $\{z_k\}$ эквивалентна тому, что фундаментальной является каждая из последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$. Это следует из соотношений

$$|a_{N+m} - a_N|,\ |b_{N+m} - b_N| \le \sqrt{(a_{N+m} - a_N)^2 + (b_{N+m} - b_N)^2} =$$

$$= |z_{N+m} - z_N| \le |a_{N+m} - a_N| + |b_{N+m} - b_N|.$$

По теореме 2.3 $\{z_k\}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда сходятся $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$. Остаётся применить к последовательностям $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ критерий Коши из действительного анализа. $\square$

Перейдем к рядам с комплексными членами. Пусть $\alpha_k, s \in \mathbb{C}$. По определению, равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = s \tag{2.5}$$

эквивалентно соотношению $s_n \to s$ $(n \to \infty)$. Здесь $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ есть n-я частичная суммма ряда (2.5). Поэтому ряд называется *сходящимся* или называется *расходящимся* в зависимости от того, сходится или расходится последовательность его частичных сумм. В первом случае s называется суммой ряда. Отметим следующее простое необходимое условие сходимости.

Теорема 2.5. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *сходится, то* $\alpha_k \to 0$.

Доказательство. Так как ряд сходится, то существует конечное s такое, что $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Поэтому $\alpha_n = s_n - s_{n-1} \to 0$. $\square$

Критерий Коши для ряда — это критерий Коши для последовательности $\{s_n\}$ его частичных сумм. Так как

$$s_{N+m} - s_N = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k,$$

то из теоремы 2.4 немедленно получается следующий результат.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\delta > 0$ *существует* $N(\delta)$ *такое, что для любого* $m \in \mathbb{N}$ *верно*

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_{N+k} \right| < \delta.$$

Наряду с исходным рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$. В силу неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_{N+k} \right| \leq \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{N+k}|$$

из сходимости ряда $\sum |\alpha_k|$ следует сходимость ряда $\sum \alpha_k$. Обратное неверно даже в случае $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Если наряду с исходным рядом сходится и ряд, состоящий из модулей, то исходный ряд называется *абсолютно сходящимся.* Если же $\sum \alpha_k$ сходится, а $\sum |\alpha_k|$ расходится, то исходный ряд $\sum \alpha_k$ называется условно сходящимся.

§ 3. Предел функции. Непрерывность и равномерная непрерывность

Пусть E и E_1 — подмножества $\overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, определённую на E и принимающую значения в E_1. Пусть z_0 — предельная точка E, не обязательно принадлежащая E, $w_0 \in E_1$. Возможно, одно или каждое из чисел z_0, w_0 есть ∞. То обстоятельство, что предел (предельное значение) $f(z)$ в точке z_0 есть w_0, записывается в виде

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \tag{3.1}$$

или $f(z) \to w_0$ при $z \to z_0$. В комплексном анализе даются два эквивалентных определения предела функции: определение в смысле Гейне и определение в смысле Коши (или, другими словами, по Гейне, по Коши).

Число w_0 называется пределом $f(z)$ по Гейне, если для любой последовательности $\{z_n\} \subset E$, $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$ выполняется $f(z) \to w_0$.

Число w_0 называется пределом $f(z)$ по Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ такое, что из условий $z \in C(\delta; z_0) \cap E$, $z \neq z_0$ следует $f(z) \in C(\varepsilon; w_0)$. Последняя импликация уточняется одним из следующих вариантов (см. § 1):

$$\begin{aligned}
z_0, w_0 \neq \infty: &\qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon;\\
z_0 \neq \infty, w_0 = \infty: &\qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > \varepsilon;\\
z_0 = \infty, w_0 \neq \infty: &\qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon;\\
z_0, w_0 = \infty: &\qquad |z| > \delta \Longrightarrow |f(z)| > \varepsilon
\end{aligned}$$

Ограничения $z_n \neq z_0$ в определении по Гейне и $z \neq z_0$ в определении по Коши означают, что в случае $z_0 \in E$ значение $f(z_0)$ не влияет на w_0.

В случае существования (3.1) предельное значение $f(z)$ не зависит от пути, лежащего в E, вдоль которого z приближается к z_0. Для любого такого пути данная величина равна w_0.

Теорема 3.1. *Определения предела по Гейне и по Коши эквивалентны. Точнее, пусть w_0 есть предел $f(z)$ в точке z_0 в смысле Гейне, тогда w_0 есть предел $f(z)$ в этой точке в смысле Коши, и наоборот.*

Доказательство этого утверждения дано, например, в [1; гл. 2, § 1].

С пределами функций справедливы те же правила действий, что и в действительном анализе (например, предел суммы равен сумме пределов, и т. д.).

Рассмотрим ситуацию $w_0 \neq \infty$.

Теорема 3.2. *Равенство* (3.1) *равносильно одновременному выполнению двух равенств*

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w_0, \quad \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w_0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Достаточно применить определение предела по Коши и соотношения

$$\begin{gathered}
|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} w_0|, \quad |\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} w_0| \leq |f(z) - w_0| = \\
= \sqrt{(\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} w_0)^2 + (\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} w_0)^2} \leq \\
\leq |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} w_0| + |\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} w_0|.
\end{gathered}$$

Отметим другой способ доказательства. Соотношение (3.1) эквивалентно

$$\lim_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0} \tag{3.3}$$

(достаточно опять применить определение предела по Коши и учесть свойства сопряжения). Так как $f(z)+\overline{f(z)} = 2\mathrm{Re}\, f(z)$ и $f(z)-\overline{f(z)} = 2i\mathrm{Im}\, f(z)$, то равенства (3.2) получаются после сложения (3.1) и (3.3). $\square$

Пусть z_0 — предельная точка E, $z_0 \in E$, $f(z_0) \neq \infty$. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{3.2}$$

Пусть каждая точка множества E является его предельной точкой. Функция $f(z)$ называется *непрерывной на* E, если эта функция непрерывна в каждой точке $z \in E$. Имеются два эквивалентных определения непрерывности — в смысле Гейне и в смысле Коши.

Далее предполагается $E \subset \mathbb{C}$. Функция $f(z)$ называется равномерно непрерывной на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых $z_1, z_2 \in E$ с условием $|z_1 - z_2| < \delta$ верно $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Нетрудно видеть, что из равномерной непрерывности функции следует её непрерывность на E. Обратное неверно (рассмотрите пример функции $f(z) = 1/z$ на множестве $|z| < 1$). Вместе с тем справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Непрерывная на компактном множестве $E \subset \mathbb{C}$ равномерно непрерывна на E.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ непрерывна на E. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует δ_0, зависящее только от ε, такое, что для любых z', $z'' \in E$, $|z' - z''| < \delta_0$ выполняется $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

Пусть z — произвольная точка E. Так как f непрерывна в точке z, существует такое $\delta(\varepsilon, z)$, что для всех $z_1, z_2 \in C(\delta, z) \cap E$ справедливо $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Достаточно потребовать выполнения неравенств

$$|f(z_1) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(z_2) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Оценка $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ следует из (3.4) и неравенства треугольника. Подберём эти числа $\delta(\varepsilon, z)$ для всех точек E.

Рассмотрим семейство кругов

$$U = \left\{ C\left(\frac{\delta}{2}; z\right) : z \in E \right\}.$$

Очевидно, U есть бесконечное открытое покрытие E. Применим лемму Гейне – Бореля – Лебега (см. § 1, теорема 1.3). Поскольку E является компактным, то открытое покрытие U содержит конечное подпокрытие U_1. Обозначим через δ_0 минимальный радиус круга из U_1. Существование и положительность δ_0 вытекают из конечности U_1. Число $\delta_0(\varepsilon)$ и обладает требуемым свойством.

Действительно, пусть $z', z'' \in E$ таковы, что $|z' - z''| < \delta_0$. Рассмотрим круг $C(\delta/2; w)$, содержащий z'. Тогда обе точки z' и z'' принадлежат $C(\delta; w)$:

$$|z' - w| < \frac{\delta}{2} < \delta;$$

$$|z'' - w| \leq |z'' - z'| + |z' - w| < \delta_0 + \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Мы учли, что $\delta_0 \leq \delta/2$. В соответствии с выбором $C(\delta; w)$ имеем нужное неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. Теорема доказана. $\square$

§ 4. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса. Непрерывность суммы ряда

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)$, состоящий из комплекснозначных функций $\alpha_k(z)$, заданных на множестве $E \subset \mathbb{C}$. Пусть $s(z)$ задана на том же множестве. Чтобы придать смысл равенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z) = s(z), \tag{4.1}$$

введём в рассмотрение последовательность частичных сумм этого ряда $s_n(z) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k(z)$.

Будем говорить, что ряд сходится к $s(z)$ в данной точке $z \in E$, если $s_n(z) \to s(z)$ при $n \to \infty$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N(\varepsilon, z)$ такое, что при $n \geq N$ верно неравенство $|s_n(z) - s(z)| < \varepsilon$. Это можно записать также как

$$|s_n(z) - s(z)| \to 0 \tag{4.2}$$

при данном z. Ряд сходится к $s(z)$ на множестве E, если этот ряд сходится к $s(z)$ во всех точках E, т. е. $s_n(z) \to s(z)$ при любом $z \in E$.

Более сильным условием является равномерная сходимость ряда. По определению, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)$ сходится к $s(z)$ равномерно на множестве E, если число N из предыдущего определения не зависит от $z \in E$. В этом случае, как говорят, $s_n(z) \to s(z)$ равномерно на E: для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geq N$ и любого $z \in E$ верно $|s_n(z) - s(z)| < \varepsilon$. Последнее эквивалентно

$$\sup_{z \in E} |s_n(z) - s(z)| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{4.3}$$

Разумеется, из равномерной сходимости ряда следует его сходимость в каждой точке E. Обратное неверно. Например, если $|z| < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Однако на множестве $E = \{z : |z| < 1\}$ этот ряд равномерно сходящимся не является. Действительно, при любом $z \in E$ в силу свойств модуля верно неравенство $|s_n(z)| \le n$, в то время как $\sup_{z \in E} |1/(1-z)| = \infty$. Поэтому при любом n

$$\sup_{z \in E} \left| s_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \infty,$$

и (4.3) не имеет места.

Сформулируем критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. *Ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)$ *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N(\varepsilon)$ *такое, что для любого* $m \ge N$ *и любого* $z \in E$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_{N+k}(z) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 4.1 (признак Вейерштрасса). *Пусть при любом* $k \ge k_0$ *и любом* $z \in E$ *справедлива оценка* $|\alpha_k(z)| \le a_k$. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(z)$ *сходится равномерно и абсолютно на* E.

Доказательство. Так как ряд $\sum a_k$ сходится, то он удовлетворяет условию критерия Коши для числовых рядов (см. § 2). Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$ верно

$$\sum_{k=1}^{m} a_{N+k} < \varepsilon. \tag{4.4}$$

В силу неотрицательности a_k и произвольности m можно считать $N \ge k_0$. Из условия теоремы и (4.4) получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_{N+k}(z) \right| \le \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{N+k}(z)| \le \sum_{k=1}^{m} a_{N+k} < \varepsilon.$$

По критерию Коши равномерной сходимости ряд $\sum \alpha_k(z)$ сходится равномерно и абсолютно на E. $\square$

Признак Вейерштрасса можно применять и к множеству E, состоящему из одной точки. В этом случае он обеспечивает абсолютную сходимость ряда в данной точке.

Теорема 4.2. *Пусть функции $\alpha_k(z)$ непрерывны на E и равномерно на E выполняется* (4.1). *Тогда $s(z)$ непрерывна на E.*

Доказательство. Зафиксируем $z_0 \in E$. Требуется показать, что для $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ такое, что $|s(z) - s(z_0)| < \varepsilon$, как только $z \in E$ и $|z - z_0| < \delta$. В силу равномерной сходимости ряда для данного ε найдётся $N(\varepsilon)$, при котором для всех $z \in E$

$$|s(z) - s_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.5}$$

Для выбранного N функция $s_N(z)$ непрерывна в z_0. Поэтому для того же ε существует δ, зависящее от $\varepsilon, N(\varepsilon)$ и z_0, т. е. от ε и z_0, что если $z \in C(\delta; z_0) \cap E$, то

$$|s_N(z) - s_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.6}$$

Наконец, взяв в (4.5) $z = z_0$, получим

$$|s(z_0) - s_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.7}$$

Из (4.5), (4.6) и (4.7) для $z \in C(\delta; z_0) \cap E$ имеем

$$|s(z) - s(z_0)| \leq |s(z) - s_N(z)| + |s_N(z) - s_N(z_0)| + |s_N(z_0) - s(z_0)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

§ 5. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости степенного ряда

Степенным рядом с центром в z_0 называется ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(\xi - z_0)^k$, где $z_0, a_k \in \mathbb{C}$ — фиксированные числа, ξ — комплексное переменное. С помощью замены $z = \xi - z_0$ этот ряд сводится к ряду с центром в нуле

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \tag{5.1}$$

который мы и рассмотрим. В этом пункте мы изучим вопрос о множестве и характере сходимости ряда (5.1).

Множество точек сходимости ряда (5.1) не пусто. При любых a_k этот ряд сходится в точке $z = 0$, его сумма равна a_0.

Существуют степенные ряды, множество точек сходимости которых состоит из одной точки $z = 0$. Пример: $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k z^k$. В любой точке $z \neq 0$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда, так как $|kz|^k \not\to 0$.

Существуют степенные ряды, множество точек сходимости которых есть вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Пример: $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k/k^k$. Для любого $z \neq 0$, начиная с некоторого k, выполняется $|z/k| \leq 1/2$, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 1/2^k$ сходится. Остаётся применить признак Вейерштрасса (см. теорему 4.1) для множества $E = \{z\}$.

Наконец, существуют степенные ряды (5.1), для которых множества сходимости и расходимости состоят из бесконечного числа точек. Пример: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k$. Этот ряд сходится в любой точке с условием $|z| < 1$. Достаточно применить признак Вейерштрасса к множеству $E = \{z\}$, сравнивая данный ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, где $q := |z|$. Если же $|z| \geq 1$, то в точке z не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Таким образом, множество точек сходимости ряда есть (открытый) единичный круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Теорема 5.1 (первая теорема Абеля). *Если ряд* (5.1) *сходится в точке* $z_0 \neq 0$, *то этот ряд сходится, и притом абсолютно, в любой точке* z *с условием* $|z| < |z_0|$. *Если ряд* (5.1) *расходится в точке* z_0, *то этот ряд расходится в любой точке* z *такой, что* $|z| > |z_0|$.

Доказательство. Пусть ряд (5.1) сходится в точке $z_0 \neq 0$. Тогда $a_k z_0^k \to 0$ (необходимое условие сходимости ряда). Поэтому существует $b > 0$ такое, что $|a_k z_0^k| < b$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Зафиксируем z с условием $|z| < |z_0|$. Так как $z_0 \neq 0$, то из предыдущего имеем:

$$|a_k z^k| = \left| a_k z_0^k \cdot \frac{z^k}{z_0^k} \right| < bq^k, \quad q := \frac{|z|}{|z_0|}.$$

Поскольку $q < 1$, ряд $\sum_k bq^k$ сходится. Результат первой части теоремы следует теперь из признака Вейерштасса.

Вторая часть теоремы, приведённая нами для полноты, непосредственно следует из первой. □

С помощью первой теоремы Абеля получается следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть ряд* (5.1) *сходится для одних* $z \neq 0$ *и расходится для других. Тогда существует конечное* $R > 0$ *такое, что если* $|z| < R$, *то в точке* z *ряд сходится, а если* $|z| > R$, *то расходится.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что на положительной части действительной оси имеется отрезок $I_1 = [u_1, v_1]$ такой, что u_1

есть точка сходимости, а v_1 есть точка расходимости ряда. Разделим I_1 пополам и в качестве $I_2 = [u_2, v_2]$ возьмём ту его половину, для которой u_2 — точка сходимости, а v_2 — точка расходимости. Действуя аналогичным образом и далее, построим бесконечную последовательность вложенных отрезков $I_n = [u_n, v_n]$, для которых левый конец u_n есть точка сходимости ряда (5.1), а правый конец v_2 — точка расходимости. Пересечение всех отрезков I_n состоит из одной точки. Обозначим эту точку через R. Ясно, что $0 < R < \infty$. Если $z \in \mathbb{C}$ таково, что $|z| < R$, то при некотором n будет $|z| < u_n$. По теореме 5.1 получаем, что в точке z ряд сходится. Если же $|z| > R$, то при некотором n верно $|z| > v_n$, следовательно, в точке z ряд расходится. $\square$

Определим теперь *радиус сходимости R степенного ряда* (5.1) следующим образом. Если ряд сходится в единственной точке $z = 0$, положим $R = 0$. Если ряд сходится на всей $\mathbb{C}$, положим $R = \infty$. В остальных ситуациях, т. е. когда ряд сходится для одних $z \neq 0$ и расходится для других, в качестве R возьмём число из заключения теоремы 5.2. Множество $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ называется *кругом сходимости ряда.*

Способы и примеры вычисления радиуса сходимости были приведены в § 8 главы 1. Здесь мы лишь сформулируем следующее утверждение.

Теорема 5.3 (формула Коши – Адамара.) *Радиус сходимости степенного ряда* (5.1) *удовлетворяет равенству $R = 1/l$, где*

$$l := \varlimsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}.$$

Предполагается, что если $l = 0$, то $R = \infty$, и если $l = \infty$, то $R = 0$.

Возьмём для ряда (5.1) любое r с условием $0 < r < R$. В точке $z = r$ ряд сходится абсолютно, поэтому числовой ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ является сходящимся. На множестве $\{z : |z| < r\}$ этот ряд почленно мажорирует ряд (5.1). Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (5.1) равномерно сходится на множестве $|z| < r$ (т. е. на любом концентрическом круге, меньшем чем круг сходимости этого ряда). Наконец, заметим, что члены степенного ряда являются непрерывными функциями. Каждая точка z из круга сходимости содержится в некотором круге $|z| < r$ меньшего радиуса $r < R$. Применим теорему 4.2 о непрерывности равномерно сходящегося ряда, состоящего из непрерывных функций. Мы получим следующий результат: *сумма степенного ряда непрерывна в его круге сходимости.* Это утверждение может быть существенно усилено. В § 7 мы покажем, что *сумма степенного ряда в его круге сходимости является не только непрерывной, но и дифференцируемой (аналитической) функцией.*

§ 6. Условия Коши – Римана

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ является внутренней точкой области определения E функции $w = f(z)$. Для $z = x + iy$ положим $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Через $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$ обозначим приращение $f(z)$, соответствующее приращению аргумента $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Здесь $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$, $\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$. В дальнейшем считаем $z_0, z_0 + \Delta z \in E$.

Функция $w = f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0, если при любом способе стремления $\Delta z \to 0$ существует конечный предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$. В этом случае полагают

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{6.1}$$

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — область, т. е. открытое связное множество (см. § 1). Функция $f(z)$, дифференцируемая во всех точках E, называется *аналитической, или голоморфной в* E.

Теорема 6.1. *Пусть функция* $w = f(z)$ *дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$. *Тогда в точке* (x_0, y_0) *существуют частные производные функций* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *и выполняются условия Коши – Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{6.2}$$

Доказательство. Условия (6.2) мы выведем из того, что в случае существования предела (6.1) его значение является одним и тем же для всех путей, вдоль которых $\Delta z \to 0$. Мы используем совпадение предельных значений вдоль различных путей лишь для двух вариантов стремления Δz к нулю, а именно вдоль действительной и мнимой осей. В выкладках мы учтём, что наличие предела комплексной величины эквивалентно наличию пределов её действительной и мнимой частей. Кроме того, используем правила действий с пределами и определения частных производных u и v.

Если $\Delta z \to 0$ вдоль действительной оси, имеем $\Delta z = \Delta x$. Поэтому

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если же $\Delta z \to 0$ вдоль мнимой оси, то $\Delta z = i\Delta y$. Поэтому

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta u}{i\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) =$$

$$= -i \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Равенства (6.2) получаются в результате сравнения действительных и мнимых частей полученных выражений для $f'(z_0)$. $\square$

Теорема 6.2. *Выполнение условий Коши – Римана в точке* (x_0, y_0) *при дополнительном условии дифференцируемости функций* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *в этой точке является достаточным для дифференцируемости* $w = f(z)$ *в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$.

Доказательство. Дифференцируемость $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по определению означает возможность представления приращений этих функций в данной точке в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + \eta_1, \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\Delta y + \eta_2. \qquad (6.3)$$

Здесь действительные величины η_1 и η_2 зависят от $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$ и являются бесконечно малыми по сравнению с $|\Delta z| := \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Последнее соответствует записи

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\eta_1}{|\Delta z|} = 0, \quad \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\eta_2}{|\Delta z|} = 0. \qquad (6.4)$$

Для комплексного a условие $a \to 0$ равносильно $|a| \to 0$. Поэтому условия (6.4) эквивалентны комплексному соотношению

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta z} = 0. \qquad (6.5)$$

Введём следующие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\Delta \overline{z} = \Delta x - i\Delta y.$$

С их помощью действительные соотношения (6.3) можно записать в эквивалентном комплексном виде

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\Delta \overline{z} + \eta_1 + i\eta_2.$$

Действительные соотношения (6.2) эквивалентны

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0.$$

(Выполните необходимые преобразования в качестве упражнений.) Следовательно, в условиях теоремы справедливо равенство

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta z}.$$

Перейдём в нём к пределу при $\Delta z \to 0$ и применим (6.5). С учетом (6.1) мы получим равенство

$$f'(z_0) = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right). \tag{6.6}$$

Теорема доказана. $\square$

Заметим, что в силу справедливости условий Коши – Римана правая часть (6.6) может быть записана одним из четырёх эквивалентных способов:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Все частные производные берутся в точке (x_0, y_0).

Условия (6.3) трудно проверить непосредственно. Сформулируем более простое для проверки достаточное условие дифференцируемости функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Теорема 6.3. *Пусть частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ существуют в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в этой точке. Тогда $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в (x_0, y_0).*

§ 7. Аналитичность суммы степенного ряда

В § 5 было показано, что в своём круге сходимости сумма ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{7.1}$$

является непрерывной функцией. Этот результат может быть существенно усилен.

Теорема 7.1. *В своём круге сходимости $|z| < R$ сумма степенного ряда* (7.1) *является аналитической функцией. При этом*

$$s'(z) = s_0(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \tag{7.2}$$

Равенство (7.2) означает, что производная суммы ряда равна сумме ряда, полученного почленным дифференцированием исходного.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $R > 0$ — радиус сходимости ряда (7.1), то радиус сходимости ряда, стоящего в правой части (7.2), также равен R. Действительно,

$$\varlimsup_{k\to\infty} (k|a_k|)^{1/(k-1)} = \varlimsup_{k\to\infty} k^{1/(k-1)} \left(|a_k|^{1/k}\right)^{k/(k-1)} = \varlimsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}.$$

Поэтому отмеченный факт следует из формулы Коши – Адамара для радиуса степенного ряда (см. теорему 5.3). Таким образом, определение функции $s_0(z)$ в области $|z| < R$, данное в условии теоремы, является корректным.

Пусть $|z| < R$. Докажем, что $s'(z) = s_0(z)$.

Выберем положительное $r < R$, чтобы выполнялось $|z| < r$. Если величина $|\Delta z|$ достаточно мала, то верно и неравенство $|z + \Delta z| < r$. По свойствам степенных рядов (см. § 5) ряд из (7.2) сходится абсолютно для $z = r$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N(\varepsilon)$ такое, что при $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.3}$$

Зафиксируем ε и возьмём $n \geq N(\varepsilon)$. В дальнейших преобразованиях мы применяем тождество

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

из которого с помощью замены $a = z + \Delta z,\ b = z$ получается

$$\frac{(z+\Delta z)^k - z^k}{\Delta z} = (z+\Delta z)^{k-1} + (z+\Delta z)^{k-2} \cdot z + \ldots + z^{k-1}.$$

Запишем следующие соотношения.

$$\left| \frac{s(z+\Delta z) - s(z)}{\Delta z} - s_0(z) \right| =$$

$$= \left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z+\Delta z)^k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k}{\Delta z} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \right| =$$

$$\leq \left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k (z+\Delta z)^k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k z^k}{\Delta z} - \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} \right| +$$

$$+\left|\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(z+\Delta z)^k - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k}{\Delta z}\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \left[(z+\Delta z)^{k-1} + (z+\Delta z)^{k-2}\cdot z + \ldots + z^{k-1} - k z^{k-1}\right]\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left[(z+\Delta z)^{k-1} + (z+\Delta z)^{k-2}\cdot z + \ldots + z^{k-1}\right]\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1}\right| = |\Sigma_1| + |\Sigma_2| + |\Sigma_3|.$$

Если величина $|\Delta z|$ достаточно мала, то $|\Sigma_1| < \varepsilon/3$. Далее, в силу неравенств $|z| < r$, $|z+\Delta z| < r$ имеем

$$|\Sigma_2| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left[(z+\Delta z)^{k-1} + (z+\Delta z)^{k-2}\cdot z + \ldots + z^{k-1}\right]\right| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|\Sigma_3| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак, при достаточно малом $|\Delta z|$ справедливы оценки

$$\left|\frac{s(z+\Delta z) - s(z)}{\Delta z} - s_0(z)\right| \le |\Sigma_1| + |\Sigma_2| + |\Sigma_3| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это означает, что $s'(z) = s_0(z)$.

Теорема доказана. □

С помощью замены переменных из теоремы 7.1 получается, что *в своём круге сходимости $|z - z_0| < R$ сумма $f(z)$ степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ является аналитической функцией, причём*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}.$$

§ 8. Теорема Коши. Доказательство Гурса

В этом параграфе приводится важнейший результат теории аналитических функций — теорема Коши. Эта теорема была доказана О. Коши в 1825 г. при дополнительном предположении о непрерывности $f'(z)$. Первое доказательство теоремы Коши в общей формулировке было дано французским математиком Эдуаром Гурса (E. Goursat, 1884). Это доказательство и излагается ниже.

По поводу определения и свойств интеграла от функции комплексного переменного см. § 6 главы 1. Некоторые свойства интеграла отмечаются по ходу изложения. Под *контуром* понимается замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана. Через γ_E обозначается контур, ограничивающий область E.

Теорема 8.1 (теорема Коши). *Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция, заданная в односвязной области E, Γ — контур, лежащий в E. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 0. \tag{8.1}$$

Доказательство Гурса теоремы Коши состоит из следующих этапов.

1) Интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz$ может быть с любой точностью приближен с помощью интегралов вида $\int\limits_{\gamma_P} f(z)\, dz$, где γ_P — контур многоугольника P, целиком лежащий в E. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует принадлежащий E многоугольник P, для которого

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz - \int\limits_{\gamma_P} f(z)\, dz \right| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

2) Теорема Коши верна для случая, когда Γ — контур треугольника.

3) Теорема Коши верна для случая, когда Γ — контур многоугольника.

4) Из предыдущего следует, что теорема Коши верна в общем случае.

Начнём с первого этапа. Будем говорить, что ломаная l вписана в кривую γ, если концы l совпадают с концами γ и вершины l принадлежат γ. Для непрерывных (не обязательно аналитических) функций справедливо следующее утверждение.

Лемма Гурса. *Пусть $f(z)$ непрерывна в области D и γ — кусочно-гладкая кривая Жордана, лежащая в D. Тогда существует ломаная l, вписанная в γ, и такая, что*

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz - \int\limits_{l} f(z)\, dz \right| < \varepsilon. \tag{8.3}$$

Доказательство леммы. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Через L обозначим длину γ. Пусть $\overline{D_1}$ — замкнутая подобласть D, целиком содержащая γ. Непрерывная на компактном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве (см. теорему 3.3). Поэтому $f(z)$ равномерно непрерывна на $\overline{D_1}$. Следовательно, существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $|z' - z''| < \delta$, то $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon/(2L)$.

Разобьём кривую γ точками $z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}$ на дуги $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ длины $< \delta$. Точки z_0, z_{n+1} являются концами γ. Обозначим через l ломаную $z_0 z_1 \ldots z_{n+1}$ со звеньями $l_0, \ldots, l_n$. Если γ — замкнутая линия ($z_0 = z_{n+1}$), то и ломаная l получается замкнутой. Длина каждого звена ломаной также $< \delta$. Уменьшая δ, можно добиться того, что $l \subset \overline{D_1}$; будем считать это условие выполненным. Заметим, что независимо от пути интегрирования

$$\int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} dz = \Delta z_k := z_{k+1} - z_k, \quad k = 0, \ldots, n$$

(достаточно использовать определение интеграла). Поэтому

$$\int\limits_{\gamma_k} dz = \int\limits_{l_k} dz = \Delta z_k.$$

Пусть $S = \sum\limits_{k=0}^{n} f(z_k)\Delta z_k$, тогда одновременно

$$S = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z_k)\, dz = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{l_k} f(z_k)\, dz.$$

Для $z \in \gamma_k$ выполняется $|z - z_k| < \delta$, поэтому $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon/(2L)$. Применяя свойства интеграла, запишем оценки

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz - S \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\, dz - \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z_k)\, dz \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)]\, dz \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \int\limits_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)]\, dz \right| <$$

$$< \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)|\, ds < \frac{\varepsilon}{2L}(d(\gamma_0) + \ldots + d(\gamma_n)) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Здесь $d(\gamma_k)$ — длина γ_k.

Для $z \in l_k$ также верно $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon/(2L)$. Поэтому аналогично предыдущему

$$\left|\int\limits_l f(z)\,dz - S\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{l_k} f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{l_k} f(z_k)\,dz\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{l_k}[f(z) - f(z_k)]\,dz\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|\int\limits_{l_k}[f(z) - f(z_k)]\,dz\right| <$$

$$< \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{l_k}|f(z) - f(z_k)|\,ds < \frac{\varepsilon}{2L}(d(l_0) + \ldots + d(l_n)) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2L}\cdot L = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из полученных оценок следует нужное неравенство (8.3):

$$\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz - \int\limits_l f(z)\,dz\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz - S\right| + \left|\int\limits_l f(z)\,dz - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Вернёмся к доказательству теоремы Коши. Если $f(z)$ — аналитическая в области E функция, то она непрерывна в E. Поэтому к ней применима лемма Гурса. В рассуждениях этой леммы в качестве ломаной, аппроксимирующей Γ, выбирается закнутая ломаная, т. е. контур многоугольника. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся принадлежащий E многоугольник P, для которого выполняется (8.2).

Перейдём ко второму этапу доказательства. Пусть Γ есть контур γ_T треугольника T, принадлежащий E. Покажем, что

$$\int\limits_{\gamma_T} f(z)\,dz = 0. \tag{8.4}$$

Прежде всего заметим, что (8.4) выполняется для функций $f(z) = 1$ и $f(z) = z$. Как уже отмечалось в доказательстве леммы Гурса, независимо от пути, соединяющего z_0 и z_1,

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} dz = z_1 - z_0.$$

Это следует из того, что для $f(z) = 1$ любая интегральная сумма равна $z_1 - z_0$. Для замкнутого пути $z_1 = z_0$, поэтому интеграл равен нулю.

Далее, функция $f(z) = z$ является непрерывной на $\mathbb{C}$. Следовательно, эта функция интегрируема по любой конечной кусочно-гладкой кривой Жордана. В случае существования интеграла

$$\int\limits_C f(z)\,dz := \lim_{\max|\Delta\xi_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} f(\omega_k)(\xi_{k+1} - \xi_k).$$

предел интегральных сумм не зависит от выбора точек ω_k, принадлежащих участку кривой C между ξ_k и ξ_{k+1}. Возьмём $f(z) = z$ и в качестве C — любой путь, соединяющий z_0 и z_1. Имеем:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} z\,dz = \lim_{\max|\Delta\xi_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} \xi_k(\xi_{k+1} - \xi_k) =$$

$$= \lim_{\max|\Delta\xi_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} \xi_{k+1}(\xi_{k+1} - \xi_k) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\max|\Delta\xi_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} (\xi_k + \xi_{k+1})(\xi_{k+1} - \xi_k) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\max|\Delta\xi_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} (\xi_{k+1}^2 - \xi_k^2) = \frac{1}{2}\left(z_1^2 - z_0^2\right).$$

Для $z_1 = z_0$ результат равен нулю.

Пусть теперь $f(z)$ произвольная аналитическая в E функция. Обозначим

$$M := \left| \int\limits_{\gamma_T} f(z)\,dz \right|.$$

Разделим треугольник T средними линиями на четыре треугольника $T^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Заметим, что

$$M = \left| \int\limits_{\gamma_T} f(z)\,dz \right| = \left| \sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\gamma_{T^{(k)}}} f(z)\,dz \right| \le \sum_{k=1}^{4} \left| \int\limits_{\gamma_{T^{(k)}}} f(z)\,dz \right|. \tag{8.5}$$

Обозначим через T_1 тот треугольник $T^{(k)}$, для которого

$$\left| \int_{\gamma_{T^{(k)}}} f(z)\,dz \right| \ge \frac{M}{4}.$$

Такой треугольник $T^{(k)}$ существует в силу (8.5). Действуя описанным образом, построим последовательность треугольников $\{T_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, со свойствами:

1° $T_{k+1} \subset T_k$;

2° периметр T_k равен $d/2^k$, где d — периметр T;

3°
$$\left| \int\limits_{\gamma_{T_k}} f(z)\,dz \right| \geq \frac{M}{4^k}.$$

Пересечение всех T_k состоит из единственной точки $z_0 \in T$:
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} T_k = \{z_0\}.$$

Так как $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|z - z_0| < \delta$ выполняется
$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon. \tag{8.6}$$

Начиная с некоторого k, все T_k лежат внутри круга $|z - z_0| < \delta$. Поэтому из (8.6) следует
$$\left| \int\limits_{\gamma_{T_k}} f(z)\,dz \right| = \left| \int\limits_{\gamma_{T_k}} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)]\,dz \right| \leq$$
$$\leq \int\limits_{\gamma_{T_k}} |f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)|\,ds < \int\limits_{\gamma_{T_k}} \varepsilon |z - z_0|\,ds < \frac{\varepsilon d^2}{4^k}.$$

Мы применили ранее доказанные равенства
$$\int\limits_{\gamma_{T_k}} dz = \int\limits_{\gamma_{T_k}} z\,dz = 0,$$

а также оценку $|z - z_0| < d/2^k$. (В последнем соотношении расстояние от точки, принадлежащей контуру треугольника, до внутренней точки треугольника оценивается через его периметр.)

Итак, мы получили
$$\frac{M}{4^k} \leq \left| \int\limits_{\gamma_{T_k}} f(z)\,dz \right| < \frac{\varepsilon d^2}{4^k}.$$

Отсюда $M < \varepsilon d^2$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $M = 0$. Это завершает второй этап доказательства.

Третий этап рассуждений связан со случаем, когда Γ есть контур γ_P многоугольника P. Разобьем P на треугольники D_j с помощью непересекающихся диагоналей. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\gamma_P} f(z)\,dz = \sum_j \int\limits_{\gamma_{D_j}} f(z)\,dz$$

(сделайте поясняющий чертеж). Каждое слагаемое в правой части равно нулю, поэтому

$$\int\limits_{\gamma_P} f(z)\,dz = 0. \tag{8.7}$$

Наконец, на четвёртом этапе мы обратимся к самому общему случаю, когда контур Γ является произвольным. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольник P, принадлежащий E, для которого справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_P} f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Но, как мы показали на предыдущем этапе, справедливо (8.7). Поэтому

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь может быть произвольным, то получаем

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Теорема полностью доказана. □

Из теоремы Коши выводятся все основные утверждения об аналитических функциях. Это не случайно. Как доказал итальянский математик Джиачинто Морера (G. Morera, 1886), свойство аналитической функции, выраженное теоремой Коши, является характерисическим. Именно, *если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области E и интеграл от неё по любому контуру, лежащему в E, равен нулю, то $f(z)$ является аналитической в E* (теорема Мореры).

Приведём без доказательства некоторое усиление теоремы 8.1.

Теорема 8.2. *Равенство* (8.1) *остаётся в силе, когда Γ — контур, ограничивающий конечную односвязную область E, $f(z)$ аналитична в E и непрерывна в $\overline{E}$.*

Справедливо также следующее обобщение теоремы Коши на многосвязные области.

Теорема 8.3. *Пусть* $f(z)$ *является аналитической в* $(n+1)$*-связной области* E*, ограниченной внешним контуром* Γ_0 *и внутренними контурами* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$*. Предположим также, что* $f(z)$ *непрерывна в* $\overline{E}$*. Тогда имеет место равенство* (8.1)*, в котором под* Γ *понимается полная граница* E*.*

§ 9. Интегральная формула Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции

Приведём одно из главных следствий теоремы Коши.

Теорема 9.1 (интегральная формула Коши). *Пусть* $f(z)$ *— аналитическая функция, заданная в односвязной области* E*,* Γ *— контур, лежащий в* E *и содержащий внутри точку* z_0*. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{9.1}$$

Доказательство. Функция $g(z) := f(z)/(z - z_0)$ является дифференцируемой всюду в E кроме, возможно, точки z_0. Зададим, помимо Γ, ещё контур γ, лежащий внутри Γ и содержащий внутри себя z_0. Обозначим через G двусвязную область, ограниченную этими двумя контурами. Функция $g(z)$ аналитична в G и непрерывна в $\overline{G}$. Заметим, что положительное направление обхода полной границы ∂G области G сводится к положительному направлению обхода контура Γ и отрицательному направлению обхода контура γ.

По теореме Коши для многосвязной области (см. теорему 8.3)

$$0 = \int\limits_{\partial G} g(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma} g(z)\, dz + \int\limits_{\gamma^-} g(z)\, dz,$$

откуда

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)\, dz = \int\limits_{\gamma} g(z)\, dz. \tag{9.2}$$

Таким образом, правый интеграл не зависит от выбора контура γ с указанными свойствами. Для его вычисления возьмём в качестве γ окружность

$\{z : |z - z_0| = \varrho\}$ при достаточно малом $\varrho > 0$. Под знаком интеграла сделаем замену $z = \varrho e^{i\varphi}$, $0 \le \varrho \le 2\pi$. Имеем:

$$\int\limits_{\gamma} g(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{f(z)i\varrho e^{i\varphi}}{\varrho e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int\limits_{0}^{2\pi} f(z)\,d\varphi. \tag{9.3}$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(z)\,d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} [f(z) - f(z_0)]\,d\varphi + \int\limits_{0}^{2\pi} f(z_0)\,d\varphi. \tag{9.4}$$

Если $\varrho \to 0$, то $f(z) \to f(z_0)$ (функция f аналитична, а значит, и непрерывна в E). Следовательно,

$$\lim_{\varrho \to 0} \int\limits_{0}^{2\pi} [f(z) - f(z_0)]\,d\varphi = 0.$$

Поэтому, переходя в (9.4) к пределу при $\varrho \to 0$, получим

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(z)\,d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} f(z_0)\,d\varphi = 2\pi f(z_0).$$

Учитывая это равенство, а также (9.2) и (9.3), запишем

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0),$$

что эквивалентно (9.1). Теорема доказана. □

Приведём без доказательства некоторое усиление интегральной формулы Коши.

Теорема 9.2. *Равенство* (9.1) *остаётся в силе, когда* Γ *— контур, ограничивающий конечную односвязную область* E, $z_0 \in E$, $f(z)$ *аналитична в* E *и непрерывна в* $\overline{E}$.

Справедливо также следующее обобщение теоремы Коши на многосвязные области.

Теорема 9.3. *Пусть* $f(z)$ *является аналитической в* $(n+1)$*-связной области* E*, ограниченной внешним контуром* Γ_0 *и внутренними контурами* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$*. Предположим также, что* $f(z)$ *непрерывна в* $\overline{E}$*. Пусть* $z_0 \in E$ *и* Γ *— полная граница* E*. Тогда имеет место равенство* (9.1).

С помощью отмеченных утверждений удаётся показать, что аналитическая функция комплексного переменного имеет производную любого порядка. В этом смысле в комплексном анализе из однократной дифференцируемости функции следует её бесконечная дифференцируемость. В действительном анализе это свойство места не имеет. (Рассмотрите функцию $g(t) = \operatorname{sign} t \cdot t^2$, $-1 < t < 1$.)

Перепишем равенство (9.1) в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{9.5}$$

Обозначим правую часть этого равенства через $F(z)$:

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{9.6}$$

Величина $F(z)$ определена и при менее ограничительных требованиях на Γ и $f(z)$. Именно, предположим в этом месте, что Γ — произвольная (не обязательно замкнутая) кусочно-гладкая кривая Жордана и $f(\xi)$ — заданная на Γ непрерывная функция. В любой точке $z \in \mathbb{C}$, не лежащей на Γ, выражение $f(\xi)/(\xi - z)$, как функция $\xi \in \Gamma$, непрерывно, и следовательно, интеграл в правой части (9.6) существует. При этом $F(z)$ является однозначной функцией переменного z. Выражение (9.6) называется *интегралом типа Коши*. Интеграл типа Коши обладает следующим замечательным свойством. *В любой точке $z \in \mathbb{C}$, не лежащей на Γ, интеграл типа Коши $F(z)$ является дифференцируемой функцией, причём*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi.$$

Более того, $F(z)$ имеет производную любого порядка и

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n}\, d\xi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9.7}$$

Доказательство см., например, в [1; гл. 4, § 2].

Возвратимся к ситуации, когда f есть аналитическая функция, Γ — контур, лежащий в её области аналитичности, и точка z лежит внутри Γ. Тогда справедлива интегральная формула Коши (9.5). Кроме того, правая часть $F(z)$ этого равенства имеет производную любого порядка и верно равенство (9.7). Соединяя эти два результата, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 9.4. *Аналитическая в области E функция f имеет в любой точке $z \in E$ производную любого порядка. Справедливы равенства*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n}\, d\xi, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\Gamma \subset E$ — любой контур, содержащий точку z внутри себя.

§ 10. Теорема Тейлора и её следствия

Как мы показали в § 7, сумма степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ в его круге сходимости $\{z : |z - z_0| < R\}$ является аналитической функцией. Эта теорема допускает обращение. Приводимый ниже глубокий результат называют *теоремой Тейлора*, хотя выдающийся английский математик Брук Тейлор (B. Taylor, 1685–1731) использовал степенные ряды только в действительной ситуации.

Теорема 10.1 (теорема Тейлора). *Аналитическая в области E функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in E$ представляется в виде степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \tag{10.1}$$

радиус сходимости которого удовлетворяет неравенству $R \geq d$, где d — расстояние от z_0 до границы E. При любом δ с условием $0 < \delta < d$ коэффициенты разложения (10.1) *удовлетворяют соотношениям*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi = \frac{f^k(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.2}$$

Ряд (10.1) с коэффициентами (10.2) называется *рядом Тейлора функции $f(z)$*. Явные выражения для коэффициентов a_k гарантируют единственность разложения (10.1).

Заметим, что теорема, обратная к теореме 7.1 (об аналитичности суммы степеннного ряда), получается, если в качестве E взять круг $|z - z_0| < R$.

По поводу доказательства теоремы 10.1 см., например, [1], [7]. Главные идеи этого рассуждения содержатся в доказательстве теоремы Лорана, которое мы приведём в § 11.

Остановимся на некоторых следствиях теоремы Тейлора.

Теорема 10.2 (неравенства Коши). *Если внутри круга сходимости $|z-z_0|<R$ степенного ряда* (10.1) *для его суммы $f(z)$ выполняется неравенство $|f(z)|<M$, то*

$$|a_k| \le \frac{M}{R^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.3}$$

Доказательство. Пусть $0<\delta<R$. Применим (10.2) и свойства интеграла:

$$|a_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi \right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{|f(\xi)|}{\delta^{k+1}}\, ds \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} M \cdot \frac{2\pi\delta}{\delta^{k+1}} = \frac{M}{\delta^k}.$$

Неравенства (10.3) получаются из оценки $|a_k| \le \frac{M}{\delta^k}$ после перехода к пределу при $\delta \to R$. □

Следующее красивое утверждение, по-видимому, впервые сформулировал Огюстен Коши (1844). Однако исторически название теоремы связывают с именем Жозефа Лиувилля (J. Liouville, 1809–1882), который изложил этот результат в своих лекциях (1847). *Целой функцией* называется функция, аналитическая на всей комплексной плоскости.

Теорема 10.3 (теорема Лиувилля). *Ограниченная целая функция есть константа.*

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ — целая, $|f(z)|<M$. В качестве центра z_0 ряда Тейлора (10.1) можно взять любую точку z_0; зафиксируем её. Разложение (10.1) справедливо в круге $|z-z_0|<R$ с любым $R>0$. Перейдём в неравенствах Коши (10.3) к пределу при $R\to\infty$. Для любого $k\ge 1$ это даст $a_k=0$. Поэтому $f(z)=a_0$, т. е. $f(z)$ постоянна. □

Теорема 10.4 (внутренняя теорема единственности аналитической функции). *Пусть аналитические в области E функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на некотором подмножестве $D\subset E$, причём D имеет по крайней мере одну предельную точку $z_0\in E$. Тогда $f(z)=g(z)$ всюду в E.*

Доказательство. Так как E — область, то точка z_0 является внутренней точкой E. Обозначим через d расстояние от z_0 до границы E. Пусть $0<\delta<d$. Покажем сначала, что $f(z)=g(z)$ в окрестности $|z-z_0|<\delta$.

В силу теоремы Тейлора в круге $|z-z_0|<\delta$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k. \tag{10.4}$$

Так как z_0 — предельная точка множества совпадения D, то существует последовательность $z_n \in D$ такая, что $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$. Начиная с некоторого n, верно $|z_n - z_0| < \delta$. Для таких n равенства $f(z_n) = g(z_n)$ с учётом (10.4) переписываются в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^k. \tag{10.5}$$

Используем теперь непрерывность суммы степенного ряда и перейдём в (10.5) к пределу при $n \to \infty$. Это даст $a_0 = b_0$. Вычтем из обеих частей (10.5) a_0 и разделим получившееся соотношение на $z_n - z_0 \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1}.$$

Повторный переход к пределу при $n \to \infty$ даст $a_1 = b_1$. Действуя таким образом, получим $a_k = b_k$ для всех k. Следовательно, $f(z) = g(z)$ всюду в круге $|z - z_0| < \delta$.

Пусть теперь z_1 — произвольная точка E. Покажем, что $f(z_1) = g(z_1)$. Соединим z_0 и z_1 непрерывной кривой Γ, лежащей в E. Пусть $\varrho > 0$ — расстояние от Γ до границы E. Возьмём положительное $\tau < \varrho$. Построим конечную совокупность конгруэнтных кругов $C(\tau; \xi)$, $\xi \in \Gamma$, покрывающих Γ. В качестве центра ξ_1 первого круга U_1 возьмём точку пересечения Γ с окружностью $|z - z_0| = \delta$. В качестве центра ξ_2 второго круга U_2 возьмём точку пересечения Γ с границей круга U_1, и так далее. Итак, в качестве центра ξ_{n+1} круга U_{n+1}, $n \geq 1$, берётся точка пересечения Γ с границей U_n. По построению, последний круг U_N накрывает z_1. Так как центр ξ_1 первого круга U_1 есть предельная точка множества $|z - z_0| < \delta$, на котором $f(z) = g(z)$, то по предыдущим рассуждениям это равенство сохраняется всюду в U_1. Далее, ξ_2 есть предельная точка U_1, значит, $f(z) = g(z)$ в круге U_2. Рассуждая таким образом, мы получим, что $f(z)$ и $g(z)$ совпадают в каждом круге $U_1, U_2, \ldots, U_N$. Так как $z_1 \in U_N$, то $f(z_1) = g(z_1)$.

Теорема доказана. □

Обратим внимание читателя на то, что в доказательстве теоремы 10.4 используются тейлоровские разложения *с центрами в различных точках*, а именно в точках $z_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$.

Нулём аналитической функции $f(z)$ называется точка z_0, для которой $f(z_0) = 0$. Натуральное m назвывается *порядком или кратностью нуля* z_0*,* если для разложения $f(z)$ в окрестности z_0 в ряд Тейлора $a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$, т. е.

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_m \neq 0.$$

В силу (10.2) это эквивалентно

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Теорема 10.5. *Аналитическая функция $f(z)$, не равная тождественно нулю, в любой замкнутой ограниченной области имеет не более конечного числа нулей. Если $f(z)$ — целая, то её число нулей не более чем счётно, причём предельной точкой нулей может быть лишь $z = \infty$.*

Этот результат легко следует из предыдущей теоремы и свойств компактных множеств. Подробности рассуждения предоставляются читателю в качестве упражнения.

Наконец, коротко отметим связь рассматриваемых вопросов и свойств так называемого аналитического продолжения. Пусть E — область, D — подобласть E. Предположим, что функции $f(z)$ и $g(z)$ обладают следующими свойствами:

(1°) $f(z)$ — аналитическая в D, а $g(z)$ — аналитическая в E;

(2°) если $z \in D$, то $g(z) = f(z)$.

При выполнении этих условий функция $g(z)$ называется *аналитическим продолжением функции $f(z)$ с области D на область E*. Не вдаваясь здесь в вопросы о существовании аналитического продолжения и методах его построения, отметим такой результат, вытекающий из теоремы 10.4. *Если аналитическое продолжение существует, то оно является единственным.*

§ 11. Теорема Лорана

Рядом Лорана с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется ряд вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{11.1}$$

$a_k \in \mathbb{C}$ — фиксированные числа, $z \in \mathbb{C}$ — переменное. Для того чтобы ответить на вопрос о множестве точек сходимости этого ряда, разобъём его на два:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{11.2}$$

Эти ряды называют соответственно *правильной частью и главной частью* ряда (11.1). Очевидно, что множество сходимости исходного ряда есть пересечение множеств сходимости рядов (11.2). Обозначим сумму правильной части через $s_1(z)$, а сумму главной части — через $s_2(z)$:

$$s_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad s_2(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Пусть $s(z)$ — сумма исходного ряда Лорана. Тогда $s(z) = s_1(z) + s_2(z)$.

Сначала рассмотрим правильную часть ряда Лорана, т. е. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Как было показано в § 5, множество точек сходимости этого ряда либо состоит из одной точки z_0, либо представляет собой круг $|z - z_0| < R$ (возможно, $R = \infty$). Во второй ситуации в любом меньшем круге $|z - z_0| < R_1$, $0 < R_1 < R$, ряд сходится равномерно. Сумма $s_1(z)$ правильной части в круге его сходимости есть функция аналитическая (см. § 7).

Обратимся к главной части ряда Лорана, т. е. ряду

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{11.3}$$

Каждый член этого ряда имеет смысл для всех точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| > 0$, т. е. для $z \neq z_0$. С помощью замены $z - z_0 = 1/\xi$ этот ряд записывается как обычный степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \xi^k. \tag{11.4}$$

Примем $\xi = 0$ при $z = \infty$. Круг сходимости ряда (11.4) имеет вид $|\xi| < r_1$ (возможно, $r_1 = \infty$). Поэтому ряд (11.3) сходится на множестве $|z - z_0| > r$, где $r = 1/r_1$ (возможно, $r = 0$). При этом на любом множестве вида $|z - z_0| > \varrho > r$ ряд (11.3) сходится равномерно. Сумма $s_2(z)$ этого ряда в области его сходимости есть функция аналитическая. Последний факт следует из аналитичности суммы ряда (11.4) в круге $|\xi| < r_1$.

Таким образом, если введённые выше числа r и R удовлетворяют неравенству $r < R$, то ряд Лорана (11.1) сходится в кольце

$$K := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Возможно, $r = 0$, $R = \infty$. В любом меньшем концентрическом кольце сходимость этого ряда равномерная. Сумма $s(z)$ ряда Лорана в кольце K его сходимости есть функция аналитическая. Французский математик Пьер Альфонс Лоран (P. A. Laurent, 1813–1854) в 1843 г. доказал, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 11.1 (теорема Лорана). *Аналитическая в кольце K функция $f(z)$ в каждой точке $z \in K$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{11.5}$$

При любом δ с условием $r < \delta < R$ выполняются равенства

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11.6}$$

Представление функции $f(z)$ её рядом (11.5) *является единственным.*

Ряд (11.5) называется *рядом Лорана функции $f(z)$.*

Доказательство. Сначала докажем существование разложения (11.5). Зафиксируем $z \in K$. Рассмотрим меньшее концентрическое кольцо K_1, содержащее z. Пусть $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < R_1\}$, где $r < r_1 < R_1 < R$. По интегральной формуле Коши для многосвязной области (см. теорему 9.3),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \tag{11.7}$$

где ∂K_1 — полная граница K_1. Обозначим $\gamma_\varrho := \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| = \varrho\}$. Очевидно, ∂K_1 состоит из окружностей γ_{R_1} и γ_{r_1}, причём при интегрировании по ∂K_1 внутренняя окружность γ_{r_1} проходится в отрицательном направлении. Таким образом, (11.7) эквивалентно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{z - \xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}}\, d\xi. \tag{11.8}$$

Для $\xi \in \gamma_{R_1}$ выполняется $|z - z_0| < |\xi - z_0|$, т. е. $q := |z - z_0| / |\xi - z_0| < 1$. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k, \tag{11.9}$$

причём ряд сходится равномерно по $\xi \in \gamma_{R_1}$. Достаточно применить признак Вейерштрасса (см. теорему 4.1), сравнивая данный ряд со сходящимся числовым рядом $\sum q^k$. Надо ещё учесть, что для $|w| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w}.$$

Для $\xi \in \gamma_{r_1}$ верно $|\xi - z_0| < |z - z_0|$, или $p := |\xi - z_0|/|z - z_0| < 1$. Поэтому выполняется равенство

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^k, \tag{11.10}$$

причём ряд сходится равномерно по $\xi \in \gamma_{r_1}$. Это следует из признака Вейерштрасса в результате сравнения этого ряда со сходящимся числовым рядом $\sum p^k$.

Далее применим следующее свойство комплексного интеграла. *Если функции g_n непрерывны на кусочно-гладкой кривой Жордана Γ и $g_n \to g$ при $n \to \infty$ равномерно на Γ, то*

$$\int\limits_{\Gamma} g_n(\xi)\, d\xi \to \int\limits_{\Gamma} g(\xi)\, d\xi, \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что равномерно сходящиеся ряды можно интегрировать почленно. Точнее, если $\alpha_k(\xi)$ непрерывны и равномерно на Γ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\xi) = \alpha(\xi),$$

то

$$\int\limits_{\Gamma} \alpha(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\xi)\right) d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Gamma} \alpha_k(\xi)\, d\xi.$$

Продолжим оценку (11.8) с учётом последнего свойства, а также представлений (11.9) и (11.10):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^k}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^k}\, d\xi =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi + \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^{-k-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_1}} f(\xi)(\xi - z_0)^k\, d\xi.$$

В последнем слагаемом для индекса суммирования сделаем замену $j := -k-1$ и затем вернёмся к прежнему обозначению k. Это даст возможность записать второе слагаемое в виде

$$\sum_{k=-1}^{-\infty}(z-z_0)^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi.$$

Таким образом, справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=-1}^{-\infty}a_k(z-z_0)^k,$$

коэффициенты которого имеют вид

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-z_0|=R_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi,\quad k=0,1,2,\ldots;$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-z_0|=r_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi,\quad k=-1,-2,\ldots$$

Так как подинтегральное выражение $f(\xi)(\xi-z_0)^{-k-1}$ является аналитической функцией $\xi\in K$, то значения интегралов не изменятся при произвольной деформации внутри K контуров интегрирования (это следует из теоремы Коши для многосвязной области, см. § 8). Поэтому при вычислении a_k при всех $k\in\mathbb{Z}$ в качестве контура интегрирования можно взять любую окружность $|z-z_0|=\delta$, где $0<\delta<R$. Это означает, что справедливы равенства (11.6).

Теперь установим единственность разложения $f(z)$ в ряд Лорана в данном кольце K. Допустим, что в этом кольце

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^k.$$

Как было отмечено, эти ряды сходятся в K равномерно. Возьмём любое целое n. Умножим равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

на $(z-z_0)^{-n-1}$ и проинтегрируем по окружности $|z-z_0|=\delta$. Для любого целого $m\neq-1$ выполняется

$$\int\limits_{|z-z_0|=\delta}(z-z_0)^m\,dz=0,$$

а если $m = -1$, то этот интеграл равен $2\pi i$. (Докажите самостоятельно в качестве упражнения.) Поэтому

$$\int\limits_{|z-z_0|=\delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n-1}\, dz = 2\pi i \cdot a_n,$$

$$\int\limits_{|z-z_0|=\delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k-n-1}\, dz = 2\pi i \cdot b_n.$$

Таким образом, $a_n = b_n$. В силу произвольности n оба разложения совпадают.

Теорема полностью доказана. $\square$

Единственность ряда Лорана важна для практического нахождения разложения (11.5). Возможно, что разложение $f(z)$ по степеням $(z-z_0)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, удаётся получить в кольце K каким-то способом, минуя непосредственное вычисление коэффициентов по громоздким формулам (11.6). Тогда это разложение совпадает с (11.5) и для a_k выполняются равенства (11.6). Примеры и упражнения на эту тему даны в § 8 части 1.

При вычислении коэффициентов a_k интегрирование в (11.6) можно выполнять по любому контуру Γ, содержащему z_0 внутри себя и лежащему в области аналитичности $f(z)$. Это свойство уже отмечалось в доказательстве теоремы 11.1.

Отметим здесь, что разложения в ряды Лорана играют важную роль при исследовании изолированных особых точек функций. В этом случае кольцо K задаётся неравенствами $0 < |z-z_0| < R$ (если z_0 — конечная изолированная особая точка) или $R < |z| < \infty$ (если рассматривается бесконечно удалённая особая точка). По поводу этой тематики см. §§ 9–11 главы 1. Доказательства приведённых там теорем читатель может найти, например, в [1], [7], [8].

§ 12. Круговое свойство дробно-линейного отображения

В этом параграфе мы приведём два доказательства так называемого кругового свойства *невырожденного дробно-линейного отображения,* т. е. отображения вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0. \tag{12.1}$$

Это свойство формулируется следующим образом.

Теорема 12.1. *Каждое невырожденное дробно-линейное отображение переводит окружность или прямую в окружность или прямую.*

Если прямую называть окружностью бесконечно большого радиуса (или окружностью, проходящей через точку ∞), то круговое свойство можно сформулировать и в более коротком виде: *каждое отображение* (12.1) *переводит окружность в окружность.*

Доказательство 1. Невырожденное линейное преобразование

$$w = az + b, \quad a \neq 0, \tag{12.2}$$

есть результат суперпозиции трёх отображений

$$\xi = |a|z, \tag{12.3}$$

$$\eta = e^{i \arg a}\xi, \tag{12.4}$$

$$w = \eta + b. \tag{12.5}$$

Отображение (12.3) является гомотетией (преобразованием подобия) с центром в точке $z = 0$ и коэффициентом гомотетии $r = |a| > 0$. Отображение (12.4) представляет собой поворот вокруг точки $\xi = 0$ на угол $\varphi = \arg a$. Наконец, (12.5) есть параллельный перенос на вектор b. Геометрически очевидно, что каждое из этих отображений обладает круговым свойством. Следовательно, и невырожденное линейное отображение (12.2) этим свойством обладает.

Невырожденное дробно-линейное отображение (12.1) при $c = 0$ редуцируется к линейному отображению, а при $c \neq 0$ является результатом суперпозиции линейного отображения, преобразования $w = 1/z$ (с точностью до обозначения переменных) и параллельного переноса. Последнее следует из равенств

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}.$$

В силу предыдущего достаточно показать, что круговым свойством обладает и преобразование расширенной комплексной плоскости, задаваемое равенством

$$w = \frac{1}{z}. \tag{12.6}$$

Любая прямая или окружность на декартовой плоскости Oxy может быть задана уравнением

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad B^2 + C^2 > 4AD. \tag{12.7}$$

Наоборот, любое уравнение (12.7) задаёт окружность (при $A \neq 0$) или прямую (при $A = 0$). (Читателю предлагается доказать эти утверждения в качестве упражнения.) Пусть $w = 1/z$. Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2},$$
$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Подставим выражения для x и y в уравнение (12.7). После простых преобразований получим

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0$$

— уравнение того же типа, что и (12.7). Поэтому отображение (12.6) переводит прямую или окружность на плоскости z в прямую или окружность на плоскости w.

Доказательство 2. Применим другой способ записи уравнений.

Каждая окружность или прямая на плоскости z может быть задана так называемым *уравнением Аполлония*

$$\left| \frac{z - p}{z - q} \right| = k, \quad k > 0. \tag{12.8}$$

Здесь $p, q \in \mathbb{C}$ — фиксированные точки. Особый случай $k = 1$ соответствует прямой. Если $k \neq 1$, то точки p и q лежат на одной прямой с центром окружности (12.8) по одну сторону от него, причём произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса окружности. Такие точки называются *сопряжёнными относительно окружности.*

Наоборот, любое уравнение вида (12.8) при $k = 1$ задаёт прямую (а именно прямую, проходящую через середину отрезка pq перпендикулярно к нему). Если $k \neq 1$, то (12.8) задаёт окружность с сопряжёнными точками p и q. Центр z_0 и радиус R этой окружности имеют вид

$$z_0 = \frac{p - k^2 q}{1 - k^2}, \quad R = \frac{k|p - q|}{|1 - k^2|}.$$

Доказательства этих утверждений в нетривиальном случае $k \neq 1$ приводятся, например, в [9; гл. 6, § 6.2].

Пусть (12.8) — уравнение рассматриваемой окружности или прямой. Если

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

то

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Поэтому отображение (12.1) переводит это уравнение в уравнение

$$\left| \frac{dw - b - p(-cw + a)}{dw - b - q(-cw + a)} \right| = k.$$

Его можно записать в виде

$$\left|\frac{w-p'}{w-q'}\right| = k', \tag{12.9}$$

где мы положили

$$p' := \frac{ap+b}{cp+d}, \quad q' := \frac{aq+b}{cq+d}, \quad k' = k\left|\frac{cq+d}{cp+d}\right|.$$

Последнее уравнение имеет тот же вид, что и (12.8). Значит, дробно-линейное отображение обладает круговым свойством.

Заметим, что при отображении $w = f(z)$ точки p и q, сопряжённые относительно окружности (12.8), преобразуются в точки p' и q', сопряжённые относительно окружности (12.9). □

Важным достоинством второго доказательства является его конструктивность. Метод доказательства даёт возможность найти в явном виде образ любой окружности или прямой при дробно-линейном отображении.

§ 13. Доказательство основной теоремы алгебры средствами ТФКП

Громкое название *основная теорема алгебры* исторически закрепилось за следующим утверждением, называемым также иногда *теоремой Даламбера – Гаусса.*

Теорема 13.1 (основная теорема алгебры). *Каждый алгебраический многочлен с комплексными коэффициентами степени* ≥ 1 *имеет комплексный корень.*

Великий Карл Фридрих Гаусс (K. F. Gauss, 1777–1855) начиная с 1799 г. опубликовал четыре различных доказательства этой теоремы. Известные доказательства, использующие средства действительного анализа, сравнительно длинны (см., например, [3; гл. 6, § 3]). Наиболее коротко основная теорема алгебры доказывается с применением аппарата теории функций комплексного переменного. Одно такое доказательство мы и приведём.

Доказательство. Пусть $f(z)$ — любой многочлен из условия теоремы. Допустим, что не существует $z_0 \in \mathbb{C}$, для которого $f(z_0) = 0$. Пусть

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Тогда $F(z)$ является целой функцией, т. е. функцией, аналитической на всей комплексной плоскости. Кроме того, $F(z)$ является ограниченной.

Действительно, так как $\deg f \geq 1$, то $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$. Поэтому $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Следовательно, существует $R > 0$ такое, что при $|z| > R$ выполняется $|F(z)| \leq 1$. Круг $|z| \leq R$ является компактным подмножеством плоскости. На нём непрерывная действительная функция $|F(z)|$ является ограниченной: для некоторого $A > 0$ при $|z| \leq R$ верно $|F(z)| \leq A$. Поэтому для любого $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$|F(z)| \leq \max(1, A).$$

Применим к $F(z)$ теорему Лиувилля (см. теорему 10.3), согласно которой ограниченная целая функция есть константа. Для некоторого c и любого $z \in \mathbb{C}$ верно $F(z) = c$. Но $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Значит, $c = 0$. Приходим к равенству

$$\frac{1}{f(z)} = 0,$$

которое невозможно ни при каком z. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Литература

1. Бицадзе, А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного : учеб. пособие для вузов / А. В. Бицадзе. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1972. – 264 с.

2. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для вузов / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – 4-е изд., перераб. – М. : Физматлит, 2002. – 312 с.

3. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Ч. 1 : Основы алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. – М. : Физматлит, 2000. – 272 с.

4. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1971. – 256 с.

5. Невский, М. В. Лекции по алгебре : учеб. пособие для вузов / М. В. Невский. – Ярославль : ЯрГУ, 2002. – 265 с.

6. Невский, М. В. Упражнения по дисциплине "Теория функций комплексного переменного" : метод. указания / М. В. Невский. – Ярославль : ЯрГУ, 2008. – 60 с.

7. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. – 14-е изд. – М. : Высшая школа, 1999. – 432 с.

8. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной : учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – 6-е изд. – М. : Физматлит, 2010. – 335 с.

9. Титчмарш, Е. Теория функций : пер. с англ. / Е. Титчмарш. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1980. – 464 с.

Указатель имён

Абель, Нильс Хенрик (N. H. Abel, 1802–1829)

Адамар, Жак (J. Hadamard, 1865–1963)

Аполлоний (ок. 260 до н. э.–190 до н. э.)

Арган, Жан Робер (J. R. Argand, 1768–1822)

Бессель, Фридрих Вильгельм (F. W. Bessel, 1784–1846)

Больцано, Бернард Пласидус Йоханн Непомук (B. P. J. N. Bolzano, 1781–1848)

Бомбелли, Рафаэль (R. Bombelli, ок. 1526–1572)

Борель, Эмиль (E. Borel, 1871–1956)

Вейерштрасс, Карл Теодор Вильгельм (K. T. W. Weirstrass, 1815–1897)

Вессель, Каспер (K. Wessel, 1745–1818)

Гамильтон, Уильям Роуан (W. R. Hamilton, 1805–1865)

Гаусс, Карл Фридрих (K. F. Gauss, 1777–1855)

Гейне, Генрих Эдуард (H. E. Heine, 1821–1881)

Гурса, Эдуар Жан-Батист (E. J.-B. Goursat, 1858–1936)

Даламбер, Жан Лерон (J. Le R. D'Alembert, 1717–1783)

Декарт, Рене (R. Descartes, 1596–1650)

Жордан, Мари Энмон Камиль (M. E. C. Jordan, 1838–1922)

Кардано, Джироламо (G. Cardano, 1501–1576)

Котес, Роджер (R. Cotes, 1682–1716)

Коши, Огюстен Луи (A. L. Cauchy, 1789–1857)

Кэли, Артур (A. Cayley, 1821–1895)

Лебег, Анри Леон (H. L. Lebesgue, 1875–1941)

Лейбниц, Готфрид Вильгельм (G. W. Leibniz, 1646–1716)

Лиувилль, Жозеф (J. Liouville, 1809–1882)

Лоран, Пьер Альфонс (P. A. Laurent, 1813–1854)

Морера, Джиачинто (G. Morera, 1856–1909)

Муавр, Абрахам де (A. de Moivre, 1667–1754)

Ньютон, Исаак (I. Newton, 1643–1727)

Риман, Георг Фридрих Бернхард (G. F. B. Riemann, 1826–1866)

Руше, Эжен (E. Rouche, 1832–1910)

Сохоцкий, Юлиан Васильевич (1842–1927)

Тейлор, Брук (B. Taylor, 1685–1731)

Эйлер, Леонард (L. Euler, 1707–1783)

Приложения

О содержании дисциплины "Теория функций комплексного переменного" для специальности "Компьютерная безопасность"

Ниже приводятся выдержки из рабочей учебной программы по дисциплине "Теория функций комплексного переменного" (ТФКП) для студентов, обучающихся по специальности "Компьютерная безопасность" на математическом факультете Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, и примерной программы зачёта по ТФКП для данной специальности. Эти материалы составлены автором настоящего учебного пособия. Приводится также относящаяся к ТФКП часть программы итогового междисциплинарного государственного экзамена по специальности "Компьютерная безопасность".

Приложение 1

Выдержка из рабочей учебной программы дисциплины "Теория функций комплексного переменного". Специальность "Компьютерная безопасность"

1. Введение. Предмет и исторические этапы теории функций комплексного переменного. Подходы Коши, Вейерштрасса и Римана к характеризации аналитической функции.

2. Комплексные числа и действия с ними. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Модуль и аргумент. Алгебраические свойства поля $\mathbb{C}$. Интерпретация Римана комплексных чисел.

3. Множества на расширенной комплексной плоскости. Открытые и замкнутые множества. Граница. Связность. Односвязные и многосвязные множества. Гладкие и кусочно-гладкие кривые Жордана.

4. Последовательности и ряды комплексных чисел. Предел последовательности. Сумма числового ряда. Основные теоремы о пределах.

5. Однозначные и многозначные функции. Предел по Коши и по Гейне. Непрерывность и равномерная непрерывность.

6. Функциональные ряды. Сходимость в точке, на множестве, равномерная. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда.

7. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Определение функций $f(z) = e^z$, $f(z) = \sin z$, $f(z) = \cos z$ с помощью степенных рядов, их свойства.

8. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Производная. Условия Коши – Римана. Аналитические функции. Аналитичность суммы степенного ряда.

9. Понятие о конформном отображении. Свойства постоянства углов и постоянства растяжений для аналитической функции.

10. Некоторые важные функции комплексного переменного. Области однолистности функций $f(z) = z^n$, $f(z) = e^z$. Понятие о римановой поверхности. Функции $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(z) = \ln z$. Дробно-линейная функция и её свойства.

11. Интегрирование функций комплексного переменного. Определение и свойства интеграла. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Интегральная формула Коши. Формула среднего значения. Принцип максимума модуля. Гармонические функции.

12. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

13. Ряды Тейлора. Теорема Тейлора. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля. Теорема о единственности аналитической функции. Нули аналитической функции. Правильные и особые точки. Понятие аналитического продолжения.

14. Ряды Лорана. Кольцо сходимости ряда Лорана. Теорема Лорана. Единственность ряда Лорана.

15. Изолированные особые точки аналитической функции. Определение и классификация изолированных особых точек. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.

16. Вычеты. Теоремы о вычетах. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов. Логарифмический вычет. Число нулей аналитической функции. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры и её доказательство средствами ТФКП.

Приложение 2

Примерная программа зачёта по дисциплине "Теория функций комплексного переменного". Специальность "Компьютерная безопасность" (2-й курс, 3-й семестр)

1. Комплексные числа и действия с ними.

2. Расширенная комплексная плоскость. Интерпретация Римана комплексных чисел.

3. Открытые и замкнутые множества на расширенной комплексной плоскости. Граница. Связность. Односвязные и многосвязные множества.

4. Последовательности и ряды комплексных чисел.

5. Однозначные функции. Предел по Коши и по Гейне. Непрерывность и равномерная непрерывность.

6. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда.

7. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши – Адамара.

8. Определение функций $e^z, \sin z, \cos z$ с помощью степенных рядов, их свойства.

9. Производная. Условия Коши – Римана и дифференцируемость функции комплексного переменного.

10. Аналитические функции. Аналитичность суммы степенного ряда.

11. Однолистные функции. Области однолистности функций z^n, e^z. Функции $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\ln z$.

12. Дробно-линейная функция и её свойства.

13. Определение и свойства интеграла от функции комплексного переменного.

14. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.

15. Интегральная формула Коши.

16. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

17. Теорема Тейлора. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.

18. Теорема о единственности аналитической функции. Нули, правильные и особые точки аналитической функции.

19. Ряд Лорана. Теорема Лорана.

20. Изолированные особые точки и их классификация. Поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.

21. Вычеты. Теоремы о вычетах.

22. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов.

23. Логарифмический вычет. Число нулей аналитической функции.

24. Принцип аргумента. Теорема Руше. Доказательство основной теоремы алгебры средствами ТФКП.

Приложение 3

Выдержка из программы государственного итогового междисциплинарного экзамена по специальности "Компьютерная безопасность" (6-й курс, 11-й семестр)

1. Предел и непрерывность комплекснозначной функции комплексного переменного. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана.

2. Ряды комплекснозначных функций комплексного переменного. Равномерная сходимость ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы ряда. Ряд Лорана и его область сходимости.

3. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о существовании производных любого порядка. Интеграл типа Коши.

4. Разложение функции комплексного переменного в ряды Лорана и Тейлора. Теорема единственности. Классификация изолированных особых точек. Поведение функции в окрестностях особых точек.

5. Вычеты. Основная теорема о вычетах.

Учебное издание

Невский Михаил Викторович

Элементы теории функций комплексного переменного

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерный набор, правка, вёрстка М. В. Невский

Подписано в печать 24.03.2014. Формат $60 \times 84^1/_8$.
Усл. печ. л. 12,55. Уч.-изд. л. 6,2. Тираж 50 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
150000 Ярославль, ул. Советская, 14